



Universidade Autónoma de Lisboa

Automação e Controlo II 2019-2020

Professor Daniel de Matos Silvestre

1 Diagrama de Bode

Sistemas de 1ª e 2ª Ordem e as respectivas respostas no tempo foram caracterizadas em função dos pólos, zeros e ganho estático da função de transferência. Este ganho assume este nome por ser o valor de amplificação que o sistema exerce sobre sinais constantes, isto é de frequência zero. Para ter uma descrição mais pormenorizada do impacto da função de transferência em sinais sinusoidais, é necessário interpretar a variável $s = \omega j$ como a resposta a uma senoide de frequência ω .

O diagrama de Bode representa de forma separada duas funções: o módulo e a fase do valor complexo obtido quando se faz a substituição de $s = \omega j$ na função de transferência. Podemos definir estas funções como $M_G(\omega) = |G(\omega j)|$ e $\phi_G(\omega) = \arg G(\omega j)$. Tendo como objectivo perceber o comportamento para um conjunto grande de frequências e dadas as respostas serem do tipo exponencial (resultaram de equações diferenciais que admitem soluções desse formato), então faz sentido representar tanto o eixo da frequência e do módulo usando escala logarítmica ou linear mas com os valores convertidos para unidades dB .

Dada essa definição, assumamos que temos $G(\omega j) = \frac{G_1(\omega j)G_2(\omega j)}{G_3(\omega j)}$ em que para uma determinada frequência obtemos 3 números complexos, que quando escritos em coordenadas polares, são $G(\omega j) =$

$\frac{\rho_1 e^{\theta_1 j} \rho_2 e^{\theta_2 j}}{\rho_3 e^{\theta_3 j}}$. Ao calcularmos o ganho temos:

$$\begin{aligned}\log |G(\omega j)| &= \log \left| \left(\frac{\rho_1 e^{\theta_1 j} \rho_2 e^{\theta_2 j}}{\rho_3 e^{\theta_3 j}} \right) \right| \\ &= \log \left| \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3} e^{(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)j} \right) \right| \\ &= \log \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3} \right) \\ &= \log \rho_1 + \log \rho_2 - \log \rho_3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\arg G(\omega j) &= \arg \left(\frac{\rho_1 e^{\theta_1 j} \rho_2 e^{\theta_2 j}}{\rho_3 e^{\theta_3 j}} \right) \\ &= \arg \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3} e^{(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)j} \right) \\ &= \theta_1 + \theta_2 - \theta_3\end{aligned}$$

Ambas as equações acima ditam que a construção do diagrama de Bode correspondente a desenhar $M_G(\omega)$ e $\phi_G(\omega)$ pode ser feito através do desenho de cada um dos elementos multiplicativos mais simples e somar as funções para chegar ao desenho final. De seguida apresentam-se os detalhes para cada um dos termos mais simples.

Ganho Uma função de transferência correspondente a um ganho assume o formato:

$$G(s) = K \quad (1)$$

que como não depende da frequência não tem parte imaginária (fase zero) e módulo igual ao logaritmo de K . Obtemos um diagrama de Bode típico apresentado na Figura 1.

Função com um zero Podemos avançar para um sistema com um zero:

$$G(s) = K(1 + \tau s) \quad (2)$$

em que podemos substituir $s = \omega j$ e relembrar que o τ corresponde a $1/\omega_c$ (o inverso da frequência) e obter a função do módulo:

$$\log M_G(\omega) = \log |K| + \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_c} \right| = \log |K| + \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

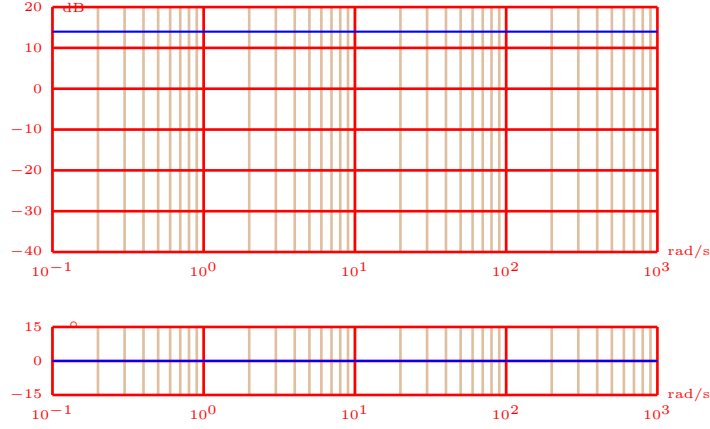


Figure 1: Diagrama assintótico de Bode para um ganho como em (1).

e perceber o que acontece à função em termos assintóticos chegando à conclusão:

$$\log M_G(\omega) \approx \begin{cases} \log K + 0, & \text{if } \omega \rightarrow 0 \\ \log K + \log \frac{\omega}{\omega_c}, & \text{if } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Desta forma podemos concluir que assintoticamente, o diagrama de Bode para o módulo vai ser constante até à frequência ω_c e de seguida sobe a uma unidade logaritmica por cada uma unidade logaritmica da frequência. A fase utiliza a contabilização dos termos simples:

$$\phi_G(\omega) = \arg K + \arg \left\{ 1 + j \frac{\omega}{\omega_c} \right\} = 0^\circ + \text{atan} \left\{ \frac{\omega}{\omega_c} \right\}$$

que em termos assintóticos se comporta como:

$$\phi_G(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \text{if } \omega \rightarrow 0 \\ 45^\circ, & \text{if } \omega = \omega_c \\ 90^\circ, & \text{if } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Os comportamentos descritos pelas assíntotas permitem-nos perceber de que forma evolui cada uma das funções. Enquanto que o diagrama real da fase segue o arco de tangente, o do módulo podemos calcular explicitamente qual a diferença para o real no valor $\omega = \omega_c$:

$$\log M_G(\omega_c) = \log |K| + \log \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2}} = \log |K| + \log \sqrt{2}$$

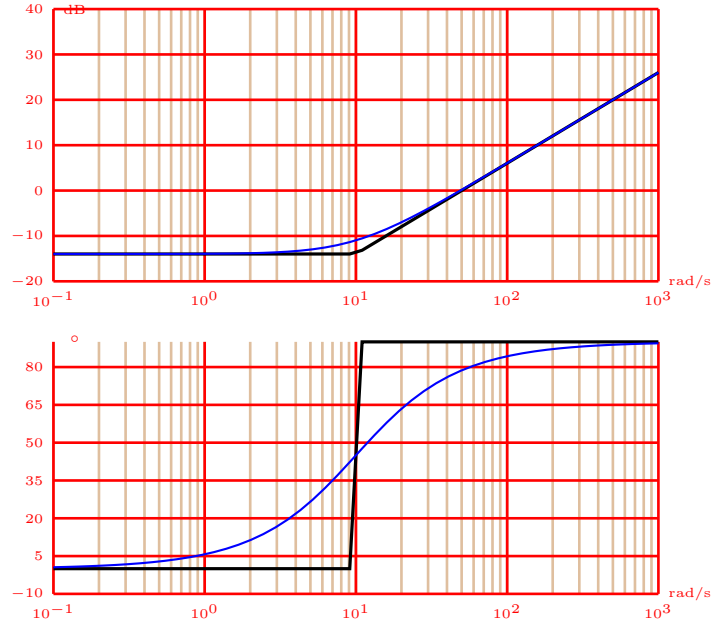


Figure 2: Diagrama assimpótico e real de Bode para um sistema com um zero em (2).

peço que se estivermos a representar em unidades dB (escala logaritmica multiplicada por 20) temos a diferença de 3 dB. A Figura 2 sumariza todas as observações anteriores num exemplo para uma função de transferência de 1 zero.

Função de sistema primeira ordem (1 pólo) Dada a relação entre o produto de logaritmos e a fase de produtos, todas as conclusões retiradas para o caso de um sistema com um zero são válidas para o caso dos pólos fazendo o simétrico de tudo. O sistema é dado pela formula genérica:

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \quad (3)$$

que se denomina por formato das constantes de tempo. De seguida podemos desenhar:

De notar que se tivermos um pólo na origem (o mesmo é semelhante para os zeros) obtemos o diagrama na Figura 4.

Função de sistema 2ª ordem Uma função de segunda ordem assume o formato:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

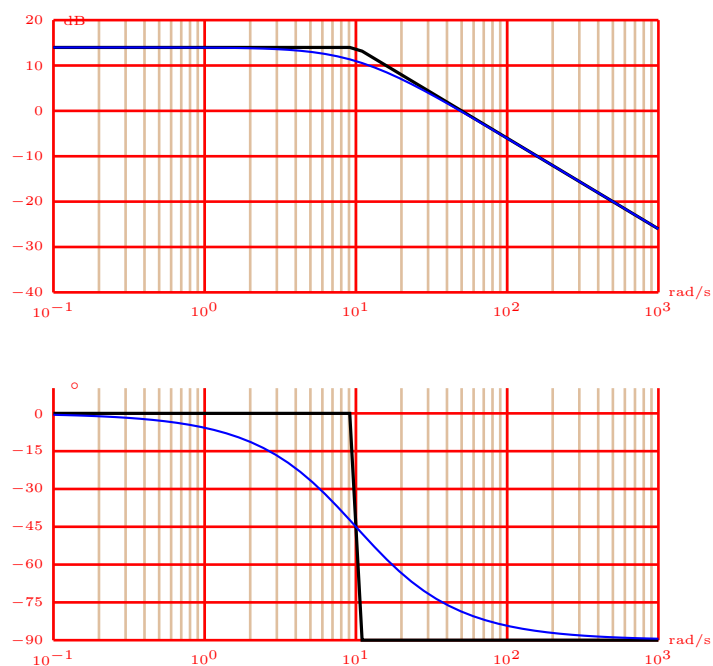


Figure 3: Diagrama assimpptótico e real de Bode para um sistema com um ganho e um pólo em (3).

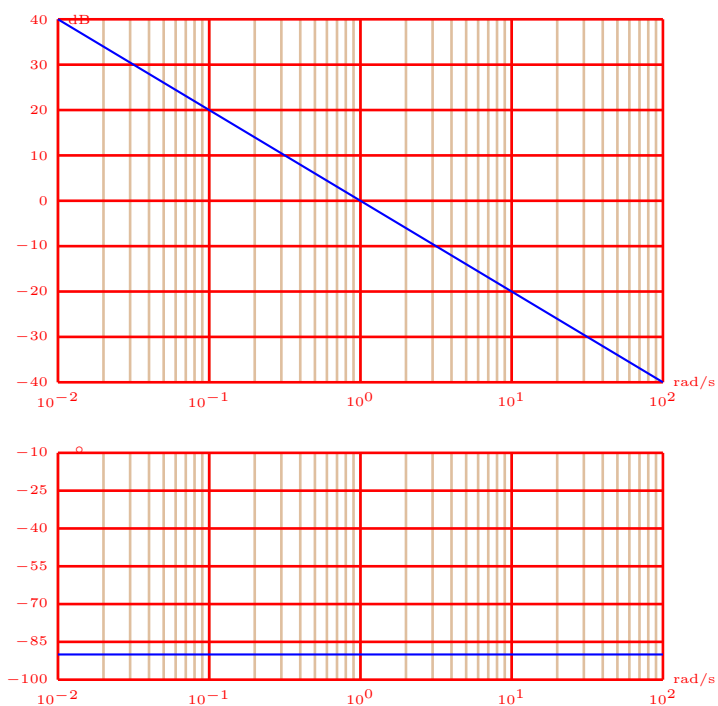


Figure 4: Diagrama assimpptótico e real de Bode para um sistema com um ganho e um pólo na origem (Integrador).

que após colocarmos no formato das constantes de tempo obtemos:

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}} \quad (4)$$

Em contraste com o sistema de primeira ordem, quando a frequência ω está próxima da frequência natural ω_n temos o módulo do denominador da função de transferência é tão mais pequeno quanto menor for o coeficiente de amortecimento ζ . Temos também que a fase vai ter uma transição mais rápida quanto menor for o coeficiente de amortecimento pela mesma razão. Temos então o diagrama de Bode para vários valores do coeficiente de amortecimento na Figura 5.

2 Diagrama e critério de Nyquist

O diagrama de Bode representa em dois gráficos separados os valores do módulo e fase do número complexo resultante da substituição de s na função de transferência por ωj . No entanto, seria de esperar representar o valor complexo directamente no plano complexo. Uma abordagem mais computacional seria substituir por valores da frequência e ir representando no plano para depois traçar a linha que une todos esses pontos. De seguida vemos como é possível desenhar o diagrama de Nyquist a partir do diagrama de Bode.

Sigamos um exemplo usando uma função de transferência genérica:

$$G(j\omega) = K_0 \frac{s + \omega_2}{(s + \omega_1)(s + \omega_3)}$$

A metodologia será retirar os pontos utilizados para desenhar o diagrama no seu formato assintótico e a partir desses unir os pontos tendo por base que tanto o módulo como a fase são funções contínuas. O diagrama de Bode (Figura 6) e o conjunto de pontos para este exemplo encontra-se na Tabela 1, que usou os valores dos pólos e zeros e pontos intermédios destes.

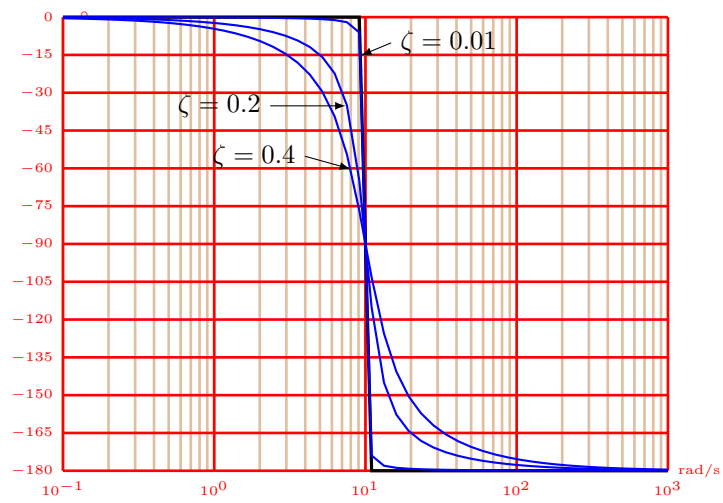
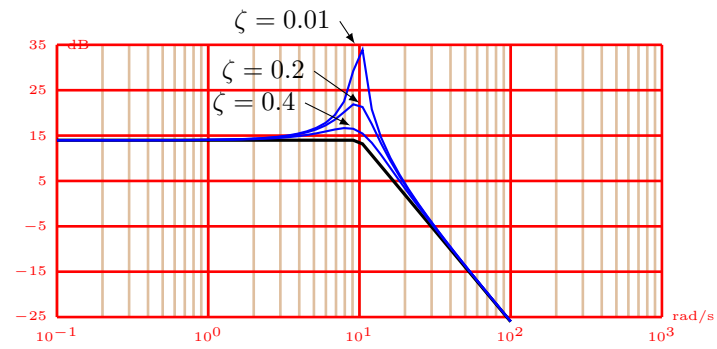


Figure 5: Diagrama assintótico e real de Bode para um sistema de segunda ordem (4).

	Frequência angular ω	$M_G(\omega)$	$\phi_G(\omega)$
(1)	$\omega \ll \omega_1$	$\approx K_1$	$\approx 0^\circ$
(2)	$\omega = \omega_1$	$\approx 0.7K_1(-3\text{dB})$	-45°
(3)	$\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$	$= \sqrt{K_1K_2}$	$-90^\circ + \Delta$
(4)	$\omega = \omega_2$	$\approx 1.4K_2(+3\text{dB})$	-45°
(5)	$\omega = \sqrt{\omega_2\omega_3}$	$\approx K_2$	$0^\circ - \Delta$
(6)	$\omega = \omega_3$	$\approx 0.7K_2(-3\text{dB})$	-45°
(7)	$\omega \gg \omega_3$	$\approx 0(-20\text{dB/dec})$	$\approx -90^\circ$

Table 1: Pontos para o desenho do diagrama de Nyquist usando os valores dos pólos e pontos intermédios destes.

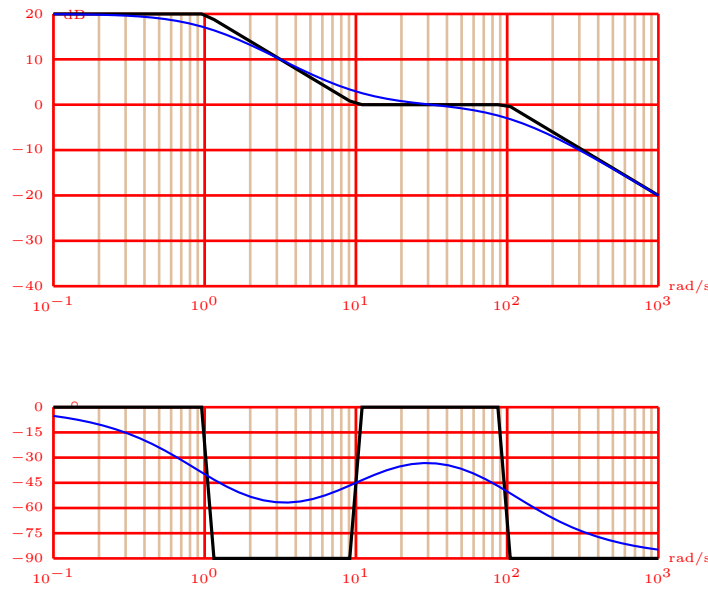


Figure 6: Diagrama de Bode para desenhar o diagrama de Nyquist.

Com base nesta informação é possível desenhar o diagrama de Nyquist que se apresenta na Figura 7 e que pode ser completado para as frequências negativas de forma a avaliar o critério de Nyquist que introduzimos de seguida.

O critério de Nyquist baseia-se num resultado chamado Princípio do Argumento de Cauchy que diz de forma simples que a quantidade de voltas no sentido horário em torno em volta da origem têm de ser iguais à diferença do número de zeros e pólos da função de variável complexa. Desta forma podemos estender o diagrama de Nyquist para incluir as frequências negativas e passando a ter o contorno que vai de 0 a ∞j depois liga com $-\infty j$ para fechar na origem novamente. A consequência directa é que temos uma ferramenta para saber a diferença de zeros e pólos de uma função de transferência.

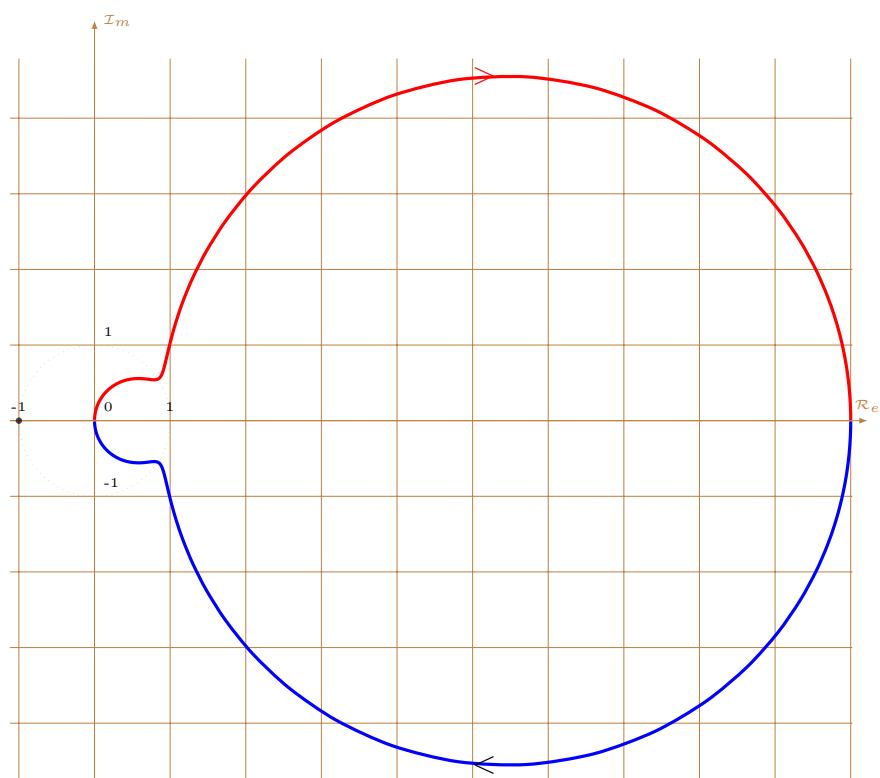


Figure 7: Diagrama de Nyquist usando $K_0 = 100$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 10$ e $\omega_3 = 100$.

Qualquer função de transferência de um SLIT tem representação através de uma fracção:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

em que as raízes do polinómio N e D dão os pólos e zeros, respectivamente. De forma análoga, a função em malha fechada é:

$$G_{cl}(s) = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

tendo os pólos como raízes de $D(s) + N(s)$. A função de transferência dada por $1 + G(s)$ pode ser expandida da seguinte forma:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)}$$

o que significa que os pólos de $1 + G(s)$ são os pólos da em malha aberta, enquanto os zeros de $1 + G(s)$ são os pólos de $G_{cl}(s)$ (o sistema em malha fechada). Dado que o contorno escolhido segue o sentido horário e engloba todo o semi-plano complexo direito, ao contarmos as voltas em redor da origem obtemos a diferença entre os pólos instáveis em malha fechada e em malha aberta.

Uma última consideração é que a função $1 + G(s)$ é apenas uma versão deslocada de $G(s)$ em uma unidade para a direita no plano complexo. Se considerarmos $G(s)$ temos portanto de contar as voltas que a função faz em redor do ponto -1. Em suma, o critério de Nyquist diz que *a quantidade de voltas ($\mathcal{C}$) no sentido horário no diagrama de Nyquist é igual ao número de pólos instáveis em malha fechada (Z) menos o número de pólos instáveis em malha aberta (P), ou seja, $\mathcal{C} = Z - P$.*

3 Root Locus

Na secção anterior iniciámos o estudo de que o comportamento do sistema em malha fechada pode ser compreendido a partir da malha aberta através do estudo do comportamento da função de transferência em torno de um ponto de interesse. Todos os mecanismos desenvolvidos até esta fase visam a análise de sistemas, embora do ponto de vista de engenharia, o desenho seja a tarefa mais comum, isto é, encontrar parte do sistema de forma a que o comportamento seja o procurado. Em forma de motivação, consideremos o desenho

de um controlador proporcional para o sistema com função de transferência dada por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

o que resulta numa função de transferência em malha fechada de:

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

A forma mais primitiva de encontrar o ganho K seria através da substituição sucessiva até se encontrar um comportamento perto do desejado. Uma forma mais sofisticada seria reparar que o sistema é de segunda ordem e, como tal, podemos utilizar o desenho através de pole placement escolhendo o tipo de comportamento desejado. Sabemos que os pólos do sistema são dados por:

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4K}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9 - 4K}}{2}$$

pelo que, se quisermos um sistema subamortecido com coeficiente de $\zeta = 1/\sqrt{2}$ para obtermos um overshoot à volta dos 5% e resolvendo para esse valor obteríamos um $K = 4.5$. Claro que para sistemas de função de transferência mais complicada tínhamos apenas métodos de aproximação do comportamento descartando pólos significativamente mais rápidos que os restantes. O root locus permitirá a resolução de problemas de desenho de controladores para sistemas de ordem superior e de respostas com maior complexidade.

Continuando com o exemplo simples anterior e consideremos $K = 1$, onde teremos pólos dados por:

$$s = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

que são ambos reais e afastados em $\sqrt{5}/2$ do ponto central $-3/2$. À medida que aumentamos K mas mantendo $9 - 4K > 0$ os pólos aproximam-se de $-3/2$ pois o valor dentro da raiz quadrada é cada vez menor. No ponto em que $K = 9/4 = 2.25$ passamos a ter ambos os pólos em $-3/2$. Isto significa que os pólos inicialmente se deslocam na horizontal no sentido um do outro até ao ponto em que temos um sistema criticamente amortecido. Se continuarmos a aumentar o valor de K teremos um valor negativo com maior magnitude dentro da raiz quadrada e ambos os pólos terão componente real igual a $-3/2$. Isto significa que os pólos irão afastar-se na vertical no plano complexo à medida que continuarmos a aumentar o ganho K (isto é, temos um sistema cada vez mais subamortecido).

De forma mais genérica, consideremos a função de transferência em malha aberta que, dado ser uma função racional, assume o formato:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e a correspondente função em malha fechada para um ganho K :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \cdot \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + K \cdot \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{K \cdot N(s)}{D(s) + K \cdot N(s)}$$

Desta forma, os zeros da malha fechada são dados pelas soluções de $K \cdot N(s) = 0$ que são iguais aos zeros da malha aberta. No entanto, os pólos da malha fechada são as soluções de $D(s) + K \cdot N(s) = 0$. Dado que os zeros permanecem na mesma localização independentemente do ganho K , é necessário averiguar o que acontece aos pólos. A equação dos pólos é equivalente a:

$$K \frac{N(s)}{D(s)} = -1$$

que no domínio dos complexos equivale a uma condição para o módulo:

$$\left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \frac{1}{K}$$

e uma para a fase:

$$\arg \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} \right\} = \pm(2\ell + 1)\pi.$$

Quando o ganho tende para infinito, a condição do módulo é equivalente a que ou $N(s) \rightarrow 0$ ou $D(s) \rightarrow \infty$, pelo que os pólos da malha fechada aproximar-se-ão dos zeros em malha aberta ou de infinito. Desta forma temos que um número de pólos em malha fechada aproximam-se do mesmo número de zeros em malha aberta enquanto que os restantes pólos tendem para infinito.

Da condição do ângulo, obtemos que os segmentos do eixo real que pertencem ao root locus têm de ter um número de raízes (pólos ou zeros) ímpar dado que os que estão à esquerda acrescentam 0 graus e os à direita acrescentam com ± 180 graus. Estes segmentos representam o deslocamento dos pólos no sentido dos zeros em malha aberta e os restantes $n - m$ pólos seguem para infinito e aproximam-se de assíntotas definidas pelos ângulos:

$$\phi_j = \frac{180^\circ}{n - m}(2j + 1) \quad \text{para} \quad j = 0, \dots, n - m - 1$$

que se intersectam no centro definido por:

$$\sigma_r = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

Para terminar o desenho é necessário calcular o ponto onde o traçado do caminho dos pólos no plano complexo abandona o eixo real, onde a função característica tem de ter derivada zero:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(1 + K \frac{N(s)}{D(s)} \right) = 0$$

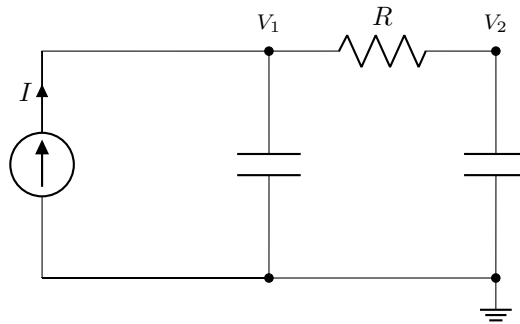
que é equivalente à condição:

$$N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$$

4 Sistemas em Espaço de Estados

A representação em espaço de estados de um sistema tem como objectivo separar os vários sinais envolvidos na modelação como: inputs, estados internos e saídas. De forma intuitiva, a representação apenas pela relação input/saída tinha como principal dificuldade a necessidade de manipulação algébrica (muitas vezes recorrendo à passagem para o domínio da frequência e de volta para o domínio do tempo) até se chegar à equação diferencial final. Outra vantagem da formulação em espaço de estados é a capacidade de representar sistemas com múltiplas entradas e saídas.

Tomemos como exemplo o circuito eléctrico da figura seguinte:



onde temos como entrada a corrente I e saída V_2 . Ambos os condensadores têm constante igual a 1 para simplificar as equações. O sistema pode ser descrito pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} = I - \frac{V_1 - V_2}{R}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} = \frac{V_1 - V_2}{R} \end{cases}$$

que admite ser rescrito em formato matricial da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u$$

Para além da equação anterior (denominada de equação do estado), no exemplo estávamos interessados em ter como saída a tensão V_2 pelo que temos a equação adicional (chamada de equação da saída):

$$y = Cx$$

com $C = [0 \ 1]$. Podemos identificar na modelação do sistema que o sinal u refere-se ao vector de inputs, o vector x acumula todas as variáveis internas do sistema, enquanto que y representa o conjunto de saídas do sistema. De notar que a representação em espaço de estados é particularmente útil pois generaliza sistemas Single-Input Single-Output (SISO) para Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) e de forma semelhante do tempo contínuo para o discreto. De seguida identificamos conceitos referidos para sistemas SLIT e SISO na formulação de espaço de estados, como a função de transferência, pólos e resposta no tempo.

A função de transferência corresponde ao quociente das transformadas de Laplace da saída e da entrada. Aplicando a transformada de Laplace à equação de estado obtemos:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ sX(s) - AX(s) &= BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

Aplicando a mesma transformada à equação da saída obtemos:

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

pelo que temos a função de transferência definida como $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Retomando o exemplo da Figura 4, podemos agora calcular a função de transferência usando a expressão para o sistema em espaço

de estados. Primeiro precisamos de calcular $(sI - A)^{-1}$:

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & s + \frac{1}{R} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s + \frac{1}{R})^2 - \frac{1}{R^2}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & s + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2s}{R}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & s + \frac{1}{R} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e utilizando a expressão podemos calcular:

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= C \frac{1}{s^2 + \frac{2s}{R}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & s + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C \frac{1}{s^2 + \frac{2s}{R}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2s}{R}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{2s}{R}} \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{Rs^2 + 2s}\end{aligned}$$

À semelhança dos sistemas SISO na sua representação através de uma equação diferencial simples, também os sistemas descritos por equações diferenciais matriciais têm como solução:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\end{aligned}$$

quer estejamos interessados no sinal dos estados internos ou da saída do sistema. Embora a demonstração teórica destas igualdades seja um tópico avançado, continuam a representar a convolução do sinal de entrada com a resposta do sistema.

A partir das respostas no tempo para sistemas em espaço de estados é possível identificar que a sua evolução (e consequente estabilidade) terá de depender do termo e^{At} que aparece tanto na resposta às condições iniciais como na resposta forçada pelo sinal de entrada. Nos casos em que a matrix A é diagonal, temos que cada equação diferencial é separável pois não existem dependências

entre as várias entradas do vector x . Desta forma, cada uma delas é um sistema SISO independente pelo que a sua resposta é uma exponencial. Assim temos:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{a_{nn}t} \end{bmatrix}$$

A função exponencial pode também ser caracterizada na sua série de potências em que:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

e que por sua vez as potências de matrizes aquando da decomposição dos valores próprios $A = V\Lambda V^{-1}$:

$$A^k = V\Lambda^k V^{-1}$$

dando origem à relação:

$$e^A = V e^{\Lambda} V^{-1}$$

O ponto importante é que a convergência de e^{At} para zero ou a divergência dependem dos valores próprios (a matriz Λ), pelo que representam os pólos do sistema. Chegamos à mesma condição de estabilidade de que $\Re\{\lambda_i\} < 0, \forall i \leq n$ e que em caso da condição seja violada para apenas um dos valores próprios (pólos) temos um sistema instável.

5 Sistemas em tempo discreto

O sistema em espaço de estados no domínio contínuo permite definir modelos para processos físicos. No entanto, sempre que tivermos alguma unidade de processamento que opere em binário, iremos ter sistemas em tempo discreto. Esta secção visa introduzir como ambos os modelos se relacionam e discutir alguns tópicos de forma semelhante ao que foi feito para o caso contínuo.

Comecemos por relembrar o sistema em espaço de estados no domínio do tempo contínuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

O primeiro ponto a notar é que a equação da saída é apenas uma transformação linear do estado e da entrada e como tal irá permanecer inalterada no tempo discreto. Para discretizar a equação do estado precisamos de relembrar a regra da derivação para funções matriciais:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}^{At} = A \mathbf{e}^{At} = \mathbf{e}^{At} A$$

e podemos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}^{-At} x(t) &= -\mathbf{e}^{-At} A x(t) + \mathbf{e}^{-At} \dot{x}(t) \\ &= -\mathbf{e}^{-At} A x(t) + \mathbf{e}^{-At} (A x(t) + B u(t)) \\ &= \mathbf{e}^{-At} B u(t) \end{aligned}$$

e integrando em ambos os lados da igualdade obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{-At} x(t) - \mathbf{e}^0 x(0) &= \int_0^t \mathbf{e}^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \\ \iff x(t) &= \mathbf{e}^{At} x(0) + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

de forma a discretizar a solução da equação diferencial, podemos definir $k = kT$ para um intervalo de discretização T e assumir que a entrada u é constante entre instantes discretos:

$$x(k) \stackrel{\text{def}}{=} x(kT)$$

$$x(k) = \mathbf{e}^{AkT} x(0) + \int_0^{kT} \mathbf{e}^{A(kT-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$x(k+1) = \mathbf{e}^{A(k+1)T} x(0) + \int_0^{(k+1)T} \mathbf{e}^{A((k+1)T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$x(k+1) = \mathbf{e}^{AT} \left[\mathbf{e}^{AkT} x(0) + \int_0^{kT} \mathbf{e}^{A(kT-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] + \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{e}^{A(kT+T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$x(k+1) = \mathbf{e}^{AT} x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{e}^{A(kT+T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

e podemos utilizar a substituição $v(\tau) = kT + T - \tau$ que tem $d\tau =$

$-dv$ no integral e obtemos:

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= e^{AT}x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\
x(k+1) &= e^{AT}x(k) - \left(\int_{v(kT)}^{v((k+1)T)} e^{Av} d\tau \right) Bu(k) \\
x(k+1) &= e^{AT}x(k) - \left(\int_T^0 e^{Av} d\tau \right) Bu(k) \\
x(k+1) &= e^{AT}x(k) + \int_0^T e^{Av} d\tau Bu(k) \\
x(k+1) &= e^{AT}x(k) + A^{-1}(e^{AT} - I)Bu(k)
\end{aligned}$$

pelo que temos que um sistema em tempo discreto é dado pelo formato genérico:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_d x(t) + B_d u(t) \\
y(t) &= C_d x(t) + D_d u(t)
\end{aligned}$$

com $A_d = e^{AT}$, $B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B$, $C_d = C$ e $D_d = D$. Esta solução exacta pode ser computacionalmente intensiva dependendo da facilidade de encontrar as exponenciais e integrais com a matriz da dinâmica do sistema. Uma possibilidade é utilizar a aproximação dada pelo método de Euler em que utilizamos:

$$x(k+1) \approx (I + AT)x(k) + T Bu(k)$$

que implicitamente utiliza a aproximação de primeira ordem para e^{AT} dada por $I + AT$. Outras possibilidades é utilizar $e^{AT} \approx (I - AT)^{-1}$ ou $e^{AT} \approx (I + \frac{1}{2}AT)(I - \frac{1}{2}AT)^{-1}$. Esta última é conhecida como a transformada de Tustin e preserva as propriedades de estabilidade do sistema original no domínio contínuo.

Um ponto importante é recapitular os tópicos sobre sistemas em tempo contínuo e observar o seu dual no domínio do discreto.

5.1 Transformada Z, função de transferência e Teoremas do Valor Inicial e Final

Para sistemas discretos, ao invés da transformada de Laplace, temos a transformada Z definida como:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

ou a equivalente formulação unilateral onde a série começa em $n = 0$. Esta transformada é linear e tem a propriedade de deslocamento

no tempo que permite escrever a função de transferência, que no domínio do discreto assume um formato:

$$H(z) = \frac{(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1}) \cdots (1 - q_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \cdots (1 - p_N z^{-1})}$$

onde os q_k são os zeros e os p_k são os pólos.

De forma semelhante, temos teoremas para o valor inicial e final e a relação no domínio da transformada dada por:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

que nos dá o valor inicial e para o valor final:

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

5.2 Estabilidade

Os pólos do sistema, tal como no domínio do contínuo, permitem-nos averiguar sobre a estabilidade de um sistema. Se o sistema estiver em espaço de estados, os pólos serão novamente os valores próprios da matriz da dinâmica do sistema. Uma diferença substancial é que a solução da equação do estado no domínio do contínuo é um conjunto de exponenciais enquanto que no domínio discreto são potências. Dessa forma, o critério para a estabilidade de um pólo em tempo contínuo é que a parte real seja negativa (de forma à exponencial tender para zero), enquanto que no domínio discreto é que o seu módulo seja inferior à unidade (de forma a que a potência tenda para zero). Temos como regiões de estabilidade no contínuo o plano complexo à esquerda do eixo imaginário, enquanto no discreto é o conjunto de valores complexos dentro do círculo de raio unitário.

6 Controlabilidade e Observabilidade

Um importante conceito para sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output) que podem ser representados em espaço de estados é o conceito de observabilidade e controlabilidade. Informalmente, observabilidade é a característica de um sistema de forma a que a partir de uma sequência de outputs é possível determinar o estado inicial enquanto que a controlabilidade refere-se à possibilidade de conduzir o estado do sistema para a origem a partir de qualquer ponto no espaço de estados.

Comecemos por escrever as equações de um sistema em tempo discreto que torna a análise mais intuitiva:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

A controlabilidade do sistema diz respeito apenas à equação do estado dado estarmos a definir como a capacidade do input $u(k)$ levar qualquer estado inicial para zero (podemos simplificar a análise fixando o ponto de partida como o estado inicial dado que o sistema é linear e invariante no tempo). Se escrevermos a relação do estado no instante k com o instante inicial obtemos a equação:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} Bu(\tau)$$

que para um valor constante dado de $x(0)$ passa a ser a questão de resolver a equação:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} Bu(\tau) \\ &= [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{C} \mathbf{u} \end{aligned}$$

De notar que a matriz $\mathcal{C}$ é chamada de matriz de controlabilidade e de que limitámos a análise à dimensão do estado, o que tem várias interpretações: i) dado que estamos a tentar resolver um sistema de equações precisamos de uma equação por cada variável que queremos resolver; ii) do ponto de vista de sistemas dinâmicos podemos pensar no caso em que a matriz A é desenhada de forma a cada instante de tempo nos permitir apenas modificar a entrada do estado seguinte.

Um sistema de equações tem solução única quando o rank (mínimo do número de vectores linearmente independentes das linhas e colunas da matriz) é igual a n (denominada de matriz full rank em inglês). Desta forma, temos uma condição simples para a verificação da controlabilidade de um sistema MIMO que corresponde a verificar se a matriz de controlabilidade é full rank.

Para um sistema em tempo contínuo e, dado que $e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} s_i(t) A^i$

para valores escalares reais $s_i(t)$, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=0}^r s_i(-\tau) A^i B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_{t_0}^{t_f} s_i(-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\
&= [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \mathbf{v} \\
&= \mathcal{C} \mathbf{v}
\end{aligned}$$

pelo que a condição é a mesma e o tempo de início t_0 e o tempo de fim t_f não têm impacto na definição dado que podemos sempre fazer uma transformação de forma a fazer uma expansão ou contração de uma função linear.

Passando para a análise da observabilidade de um sistema, dado que a questão é determinar o estado inicial sabendo o input e a saída do sistema, podemos ignorar o input fazendo uma mudança de variável. Desta forma, apenas a equação $y(k) = Cx(k)$ é relevante para esta análise e a dinâmica não forçada do sistema. A resposta para qualquer instante k é dada por:

$$y(k) = CA^k x(0)$$

e acumulando n valores da saída obtemos a equação:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) \\
&= \mathcal{O} x(0)
\end{aligned}$$

e temos uma condição semelhante para a existência de solução do sistema de equações em que a matrix de observabilidade $\mathcal{O}$ tem de ser full rank.

De forma semelhante à análise de sistemas em tempo contínuo para a controlabilidade, as derivadas do output são dadas por $\frac{\partial^i \tilde{y}}{\partial t^i} = CA^i e^{At} x(0)$ para $i \geq 0$ (em que de forma a calcular o lado esquerdo da equação é necessário ter medidas ao longo de um intervalo de tempo). Se avaliarmos as derivadas para $t = 0$ temos $\frac{\partial^i \tilde{y}}{\partial t^i}(0) =$

$CA^i x(0)$. Ao acumularmos as primeiras n derivadas obtemos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial^i \tilde{y}}{\partial t^i}(0) \end{bmatrix} = \mathcal{O}x(0)$$

pelo que obtemos o mesmo critério de full rank para a matriz de observabilidade também para sistemas contínuos.

7 Materiais Avançados

Os alunos interessados podem querer aprofundar os seus conhecimentos no que toca a problemas de estimação relativas ao estado do sistema a partir das medidas vindas do sensor, na área de controlo de múltiplos veículos, problemas relacionados com redes de computadores e optimização ou sensibilidade das saídas em função das entradas de um sistema. Os alunos podem escolher qualquer dos tópicos para executar o trabalho adicional.

Tópicos relacionados com a convergência de formações de veículos estão nos artigos [1], [2], [3], [4], [5] e [6].

Como visto durante a Unidade Curricular, a estimação do estado do sistema dinâmico é um papel fundamental. Tópicos relacionados com a estimação no sentido determinístico estão disponíveis em [7], [8], [9] e [10].

A modelação não prevê a existência de erros ou falhas tanto nos sensores como atuadores que precisam de ser detectados. Utilizando os métodos de estimação podem ser definidos algoritmos de detecção de falhas como os exemplos em [11], [12], [13], [14] e [15]. Outra possibilidade é medir a sensibilidade da saída em função de variações dos inputs [16].

Muitos algoritmos utilizados em software ou hardware podem ser modelados usando técnicas semelhantes às apresentadas para os modelos dinâmicos de sistemas como por exemplo em [17], [18] e [19].

Um último exemplo mostra como é possível descobrir a fonte de um comportamento em que os nós de uma formação seguem um determinado algoritmo de propagação em [20] e [21].

References

- [1] D. Antunes, D. Silvestre, and C. Silvestre, “Average consensus and gossip algorithms in networks with stochastic asymmetric communications,” in *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pp. 2088–2093, Dec 2011.
- [2] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Finite-time convergence policies in state-dependent social networks,” in *American Control Conference (ACC), 2015, Chicago, Illinois, USA.*, pp. 1041–1046, July 2015.
- [3] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Set-consensus using set-valued observers,” in *American Control Conference (ACC), 2015, Chicago, Illinois, USA.*, July 2015.
- [4] D. Silvestre, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Broadcast and gossip stochastic average consensus algorithms in directed topologies,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, pp. 1–1, 2018.
- [5] R. Ribeiro, D. Silvestre, and C. Silvestre, “Decentralized control for multi-agent missions based on flocking rules,” in *to appear in 14th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing (CONTROLO 2020)*, July 2020.
- [6] R. Ribeiro, D. Silvestre, and C. Silvestre, “A rendezvous algorithm for multi-agent systems in disconnected network topologies,” in *to appear in 2020 Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, September 2020.
- [7] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Self-triggered set-valued observers,” in *European Control Conference (ECC)*, pp. 3647–3652, July 2015.
- [8] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Fault detection for LPV systems using set-valued observers: A co-prime factorization approach,” *Systems & Control Letters*, vol. 106, pp. 32 – 39, 2017.
- [9] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Set-based fault detection and isolation for detectable linear parameter-varying systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 18, pp. 4381–4397, 2017. rnc.3814.

- [10] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Self-triggered and event-triggered set-valued observers,” *Information Sciences*, vol. 426, pp. 61 – 86, 2018.
- [11] D. Silvestre, P. Rosa, R. Cunha, J. Hespanha, and C. Silvestre, “Gossip average consensus in a byzantine environment using stochastic set-valued observers,” in *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4373–4378, Dec 2013.
- [12] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Finite-time average consensus in a byzantine environment using set-valued observers,” in *American Control Conference (ACC), 2014*, pp. 3023–3028, June 2014.
- [13] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Distributed fault detection using relative information in linear multi-agent networks,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 21, pp. 446–451, 2015. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFE-PROCESS 20, Paris, 2-4 September 2015.
- [14] D. Silvestre, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Fault detection for cyber-physical systems: Smart grid case,” in *23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Hong-Kong, China.*, July 2018.
- [15] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Stochastic and deterministic fault detection for randomized gossip algorithms,” *Automatica*, vol. 78, pp. 46 – 60, 2017.
- [16] D. Silvestre, P. Rosa, J. Hespanha, and C. Silvestre, “Sensitivity analysis for linear systems based on reachability sets,” in *58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, December 2019.
- [17] D. Silvestre, J. Hespanha, and C. Silvestre, “A pagerank algorithm based on asynchronous gauss-seidel iterations,” in *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, pp. 484–489, June 2018.
- [18] D. Silvestre, J. Hespanha, and C. Silvestre, “Desynchronization for decentralized medium access control based on gauss-seidel iterations,” in *2019 American Control Conference (ACC)*, pp. 4049–4054, July 2019.
- [19] D. Silvestre, “Optool — an optimization toolbox for iterative algorithms,” *SoftwareX*, vol. 11, p. 100371, 2020.

- [20] H. Hao, D. Silvestre, and C. Silvestre, “Source localization and network topology discovery in infection networks,” in *2018 37th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 1915–1920, July 2018.
- [21] H. Hao, D. Silvestre, and C. Silvestre, “A microscopic-view infection model based on linear systems,” *Information Sciences*, vol. 510, pp. 1 – 15, 2020.