



Colectânea de Exercícios,
Testes e Exames de Matemática,
para Economia e Gestão

Bruno Maia
bmaia@ual.pt

1^a edição
2014

A colectânea encontra-se protegida por direitos de autor. Todos os direitos de autor ou outros direitos de propriedade intelectual presentes no texto, imagens, e outros conteúdos da colectânea são propriedade do autor/UAL. É permitido reproduzir extractos de texto por meio de cópia ou distribuição para outras pessoas, mas em todos os casos para fins não comerciais. Só é permitido utilizar o conteúdo da colectânea para uso pessoal. Nenhuma parte desta colectânea pode ser distribuída para ganhos comerciais nem poderá ser modificada ou incorporada em qualquer outro trabalho, publicação ou site.

Conteúdo

1	Ficha 1	3
1.1	Exercícios: álgebra, equações, rectas e inequações	3
1.2	Resoluções propostas	5
2	Ficha 2	11
2.1	Exercícios: função quadrática, potências, função exponencial e logarítmica	11
2.2	Resoluções propostas	13
3	Ficha 3	19
3.1	Exercícios: derivadas	19
3.2	Resoluções propostas	20
4	Ficha 4	25
4.1	Exercícios: primitivas	25
4.2	Resoluções propostas	26
5	Ficha 5	31
5.1	Exercícios: integrais e áreas	31
5.2	Resoluções propostas	32
6	Teste 1, de 4 de Novembro de 2013	37
6.1	Enunciado	37
6.2	Resolução proposta	39
7	Teste 2, de 5 de Dezembro de 2013	43
7.1	Enunciado	43
7.2	Resolução proposta	44
8	Teste 3, de 24 de Janeiro de 2014	49
8.1	Enunciado	49
8.2	Resolução proposta	50
9	Exame Final, de 6 de Fevereiro de 2014	53
9.1	Enunciado	53
9.2	Resolução proposta	55

10 Apêndice	61
10.1 Formulário de derivadas	61
10.2 Formulário de primitivas	61

Capítulo 1

Ficha 1

1.1 Exercícios: álgebra, equações, rectas e inequações

1. Simplifique:

(a) $-3 + (-4) - (-8)$	(c) $-3[4 - (-2)]$	(e) $2x \left(\frac{3}{2x} \right)$
(b) $(-3)(-12) \left(-\frac{1}{2} \right)$	(d) $-3(-x - 4)$	(f) $0 \cdot (1 - x)$

2. Desenvolva os produtos e simplifique os termos semelhantes:

(a) $x^2(1 + x^3)$	(d) $(3x - y)(x - 2y)$
(b) $(4n - 3)(n - 2)$	(e) $-x(2x - y) + y(1 - x) + 3(x + y)$
(c) $6a^2b(5ab - 3ab^2)$	(f) $r^2(r - 3s) + s^3 - (-s^3 - r^3 + 3r^2s)$

3. Expanda os produtos:

(a) $(x + 2y)^2$	(c) $(3u - 5v)^2$
(b) $\left(\frac{1}{x} - x \right)^2$	(d) $(2z - 5w)(2z + 5w)$

4. Factorize as seguintes expressões, colocando em evidência os factores comuns e/ou usando os casos notáveis da multiplicação:

(a) $a^3 - a^2b$	(c) $3x - 9y + 27z$	(e) $5xy^2 - 45x^3y^2$
(b) $8x^2y^2 - 16xy$	(d) $7x^2 - 49xy$	(f) $3x^2 - 12$

5. Resolva as seguintes equações:

(a) $5x - 10 = 15$	(d) $\frac{x - 3}{4} + 2 = 3x$
(b) $-5(3x - 2) = 16(1 - x)$	(e) $\frac{1}{2x + 1} = \frac{1}{x + 2}$
(c) $3x = \frac{x}{4} - 7$	(f) $ x - 4 = 2$

6. Resolva cada problema, formulando uma equação e resolvendo-a:

- (a) A soma do dobro de um número com 5 é igual à diferença entre esse número e 3. Que número é esse?
- (b) A Joana recebe o dobro por cada hora de trabalho para além das 38 horas semanais. Na semana passada ela trabalhou 48 horas e ganhou 812 euros. Quanto ganha por hora no horário de trabalho normal?
- (c) O Tiago investiu 15000 euros num depósito a prazo que paga uma taxa de juro anual de 10%. Quanto dinheiro adicional deverá depositar num outro depósito com uma taxa de juro anual de 12% se ele pretender ganhar um total de 2100 euros de juros ao final de um ano?

7. Determine o declive m , os pontos de intersecção com os eixos coordenados e esboce as seguintes rectas:

(a) $y = 3x + 1$

(c) $y = \frac{x}{3} - 1$

(b) $y = -2x + 4$

(d) $3x + 4y = 12$

8. Esboce as rectas contendo os seguintes pares de pontos e determine as respectivas equações:

(a) $A = (1; 1), \quad B = (3; 2)$

(c) $E = (2; 0), \quad F = (0; 3)$

(b) $C = (-2; 3), \quad D = (1; 0)$

9. Determine as equações das rectas que satisfazem as seguintes condições:

(a) Contém o ponto $(-2; 3)$ e tem declive -3 .

(b) Contém o ponto $(-2; 1)$ e tem declive 2.

10. Seja $f(x) = mx + b$, $f(2) = 3$ e $f(-1) = -3$. Quanto será $f(-3)$?

11. Resolva graficamente os seguintes sistemas de equações:

(a)
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 6 \end{cases}$$

12. Resolva as seguintes inequações:

(a) $2(x - 4) < 5$

(c) $|5 - 3x| \leq 8$

(b) $\frac{1}{3}(y - 3) + 4 \geq 2$

(d) $|2x - 4| > 3$

13. Esboce no plano- xy as regiões definidas por:

(a) $2x + 4y \geq 5$

(c) $100x + 200y \leq 300$

(b) $x - 3y + 2 \leq 0$

1.2 Resoluções propostas

1. (a) $-3 + (-4) - (-8) = -3 - 4 + 8 = -7 + 8 = 1$
(b) $(-3)(-12) \left(-\frac{1}{2}\right) = (-3) \left(\frac{12}{2}\right) = (-3)6 = -18$
(c) $-3[4 - (-2)] = -3[4 + 2] = -3 \cdot 6 = -18$
(d) $-3(-x - 4) = 3x + 12$
(e) $2x \left(\frac{3}{2x}\right) = \frac{2x \cdot 3}{2x} = 3$
(f) $0 \cdot (1 - x) = 0$
2. (a) $x^2(1 + x^3) = x^2 + x^2 \cdot x^3 = x^2 + x^5$
(b) $(4n - 3)(n - 2) = 4n^2 - 8n - 3n + 6 = 4n^2 - 11n + 6$
(c) $6a^2b(5ab - 3ab^2) = 30a^3b^2 - 18a^3b^3$
(d) $(3x - y)(x - 2y) = 3x^2 - 6xy - yx + 2y^2 = 3x^2 - 7xy + 2y^2$
(e) $-x(2x - y) + y(1 - x) + 3(x + y) = -2x^2 + xy + y - xy + 3x + 3y = -2x^2 + 3x + 4y$
(f) $r^2(r - 3s) + s^3 - (-s^3 - r^3 + 3r^2s) = r^3 - 3r^2s + s^3 + s^3 + r^3 - 3r^2s = 2r^3 - 6r^2s + 2s^3$
3. (a) $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (2y) + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$
(b) $\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x + x^2 = \frac{1}{x^2} - 2 + x^2$
(c) $(3u - 5v)^2 = (3u)^2 - 2 \cdot (3u) \cdot (5v) + (5v)^2 = 9u^2 - 30uv + 25v^2$
(d) $(2z - 5w)(2z + 5w) = (2z)^2 - (5w)^2 = 4z^2 - 25w^2$
4. (a) $a^3 - a^2b = a^2(a - b)$
(b) $8x^2y^2 - 16xy = 8xy(xy - 2)$
(c) $3x - 9y + 27z = 3(x - 3y + 9z)$
(d) $7x^2 - 49xy = 7x(x - 7y)$
(e) $5xy^2 - 45x^3y^2 = 5xy^2(1 - 9x^2) = 5xy^2(1 - 3x)(1 + 3x)$
(f) $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$
5. (a) $5x - 10 = 15 \Leftrightarrow 5x = 15 + 10 \Leftrightarrow 5x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{5} \Leftrightarrow x = 5$
(b) $-5(3x - 2) = 16(1 - x) \Leftrightarrow -15x + 10 = 16 - 16x \Leftrightarrow -15x + 16x = 16 - 10 \Leftrightarrow x = 6$
(c) $3x = \frac{x}{4} - 7 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 3x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{4 \cdot 7}{4} \Leftrightarrow 12x = \frac{x}{4} - 28 \Leftrightarrow 11x = -28 \Leftrightarrow x = -\frac{28}{11}$

$$(d) \frac{x-3}{4} + 2 = 3x \Leftrightarrow \frac{x-3}{4} + \frac{4 \cdot 2}{4} = \frac{4 \cdot 3x}{4} \Leftrightarrow x-3+8=12x \Leftrightarrow x-12x=3-8 \Leftrightarrow -11x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{-11} \Leftrightarrow x=\frac{5}{11}$$

$$(e) \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow 2x+1 = x+2 \wedge 2x+1 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow 2x-x=2-1 \wedge 2x \neq -1 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x=1 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x=1$$

$$(f) |x-4|=2 \Leftrightarrow x-4=-2 \vee x-4=2 \Leftrightarrow x=2 \vee x=6$$

6. (a)

$$2x+5=x-3 \Leftrightarrow 2x-x=-3-5 \Leftrightarrow x=-8$$

(b) 48 horas = 38 horas normais + 10 horas extraordinárias.

Seja x a remuneração por cada hora normal.

$$38x + 10 \cdot (2x) = 812 \Leftrightarrow 38x + 20x = 812 \Leftrightarrow 58x = 812 \Leftrightarrow x = \frac{812}{58} \Leftrightarrow x = 14 \text{ euros}$$

(c) O depósito A rende 10% de 15 000, ou seja: $0,10 \times 15\,000 = 1\,500$.

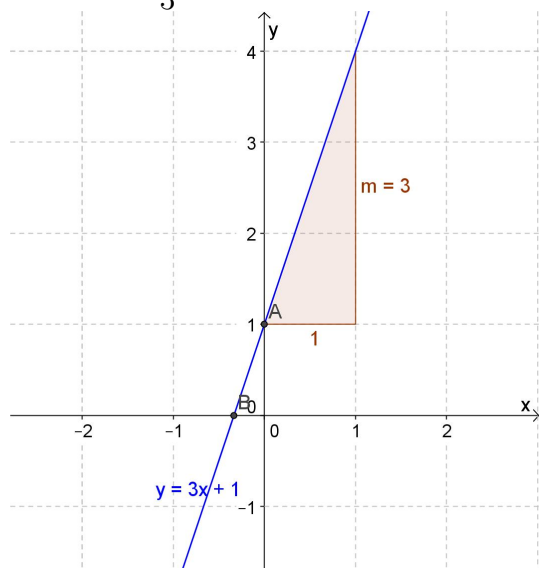
Irá depositar uma quantidade adicional x no depósito B, que renderá 12% de x , ou seja: $0,12x$. De acordo com os dados do problema:

$$1\,500 + 0,12x = 2\,100 \Leftrightarrow 0,12x = 600 \Leftrightarrow x = \frac{600}{0,12} \Leftrightarrow x = 5\,000 \text{ euros}$$

7. (a) $y = 3x + 1$

$m = 3$;

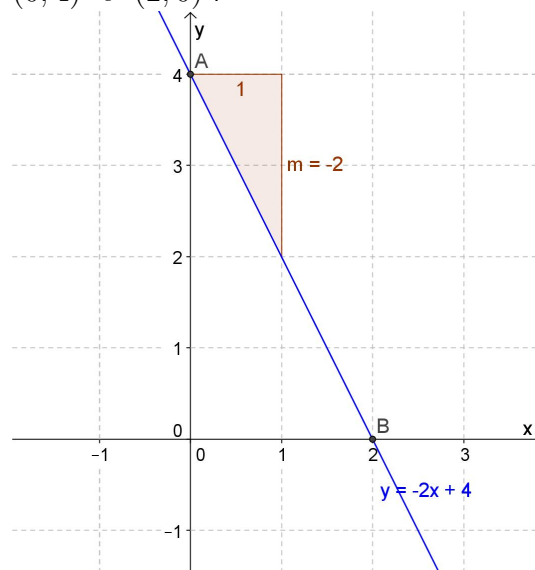
$(0; 1)$ e $(-\frac{1}{3}; 0)$.



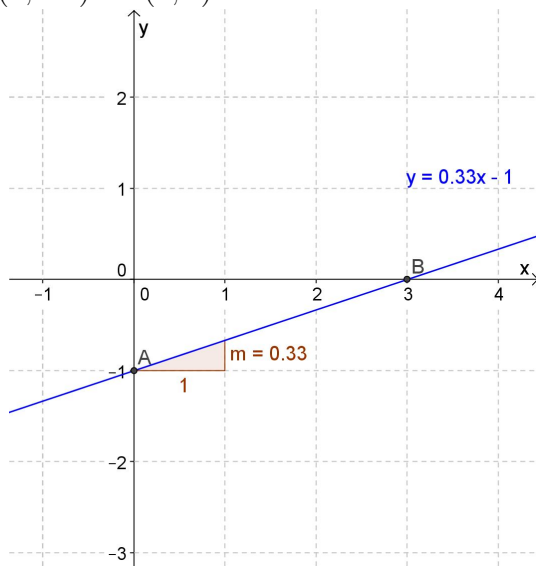
(b) $y = -2x + 4$

$m = -2$;

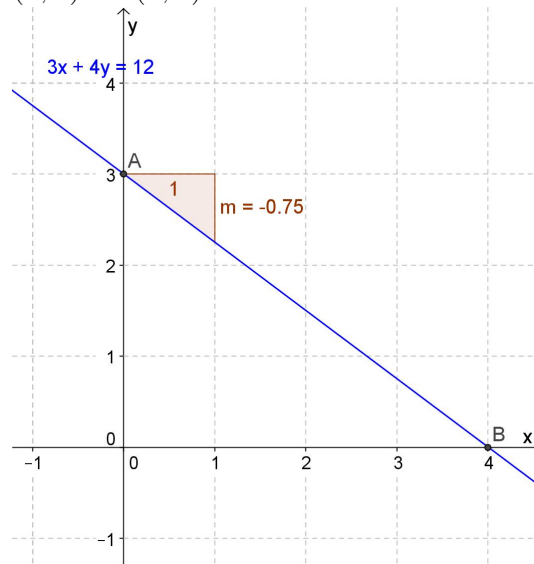
$(0; 4)$ e $(2; 0)$.



(c) $y = \frac{x}{3} - 1$
 $m = \frac{1}{3}$;
 $(0; -1)$ e $(3; 0)$.



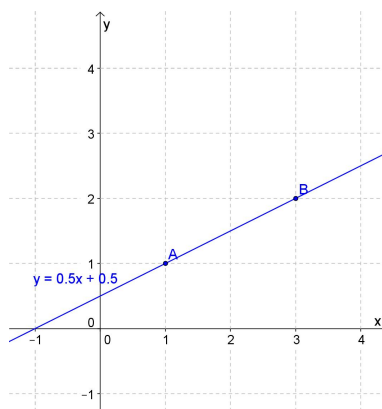
(d) $3x + 4y = 12 \Leftrightarrow 4y = -3x + 12$
 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{12}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$
 $m = -\frac{3}{4}$;
 $(0; 3)$ e $(4; 0)$.



$A = (1; 1)$
 $B = (3; 2)$

$m = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$

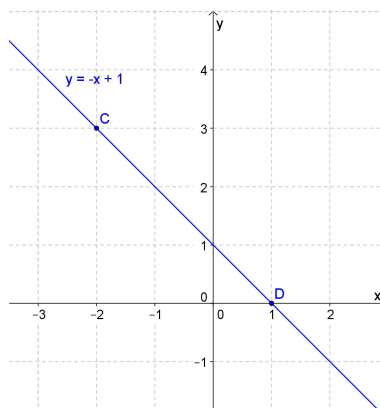
8. (a) $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow$
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



$C = (-2; 3)$
 $D = (1; 0)$

$m = \frac{0 - 3}{1 - (-2)} = \frac{-3}{3} = -1$

(b) $y - 0 = -1(x - 1) \Leftrightarrow$
 $y = -x + 1$

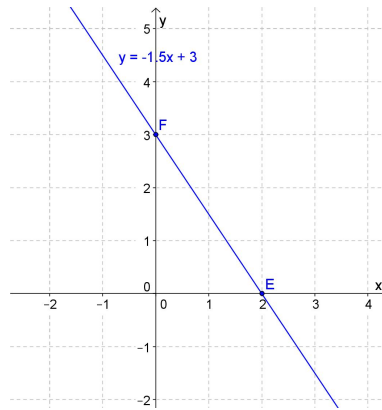


$$E = (2; 0)$$

$$F = (0; 3)$$

$$m = \frac{3 - 0}{0 - 2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$(c) \quad y = -\frac{3}{2}x + 3$$



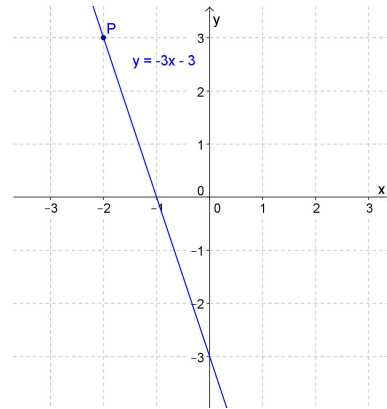
9. (a) Contém o ponto $(-2; 3)$ e tem declive -3 .

$$P = (-2; 3)$$

$$m = -3$$

$$y - 3 = -3(x - (-2)) \Leftrightarrow$$

$$y = -3x - 3$$



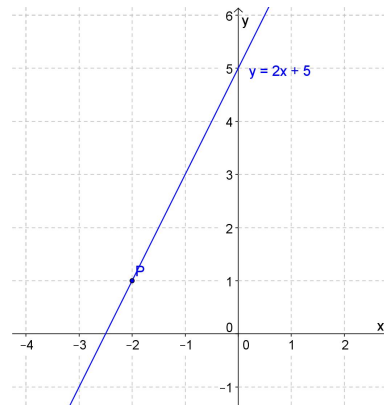
- (b) Contém o ponto $(-2; 1)$ e tem declive 2.

$$P = (-2; 1)$$

$$m = 2$$

$$y - 1 = 2(x - (-2)) \Leftrightarrow$$

$$y = 2x + 5$$



10.

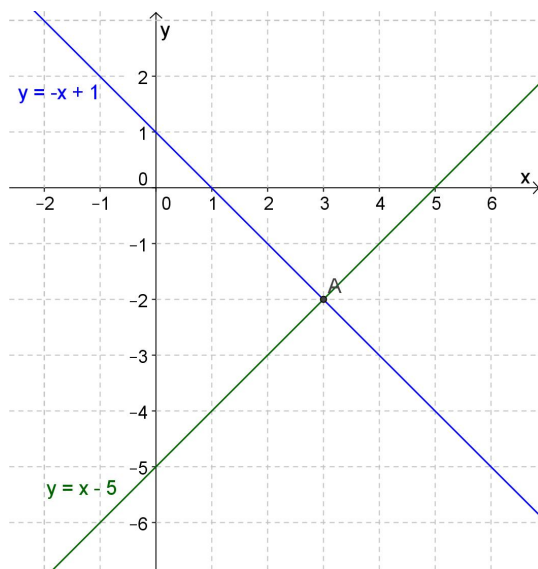
$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + b = 3 \\ -m + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + b = 3 \\ b = m - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + (m - 3) = 3 \\ b = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 6 \\ b = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Logo $f(x) = 2x - 1$ e $f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$.

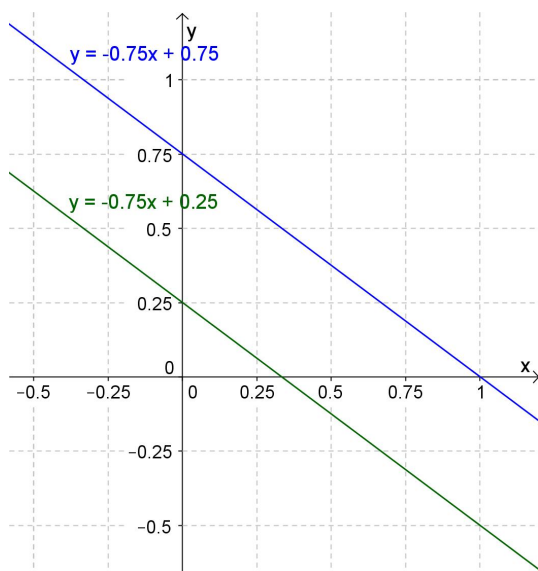
11. (a)

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 5 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$



(b)

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -3x + 1 \\ 8y = -6x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \end{cases}$$



Sistema impossível: rectas paralelas ($m = -3/4$) não se intersectam.

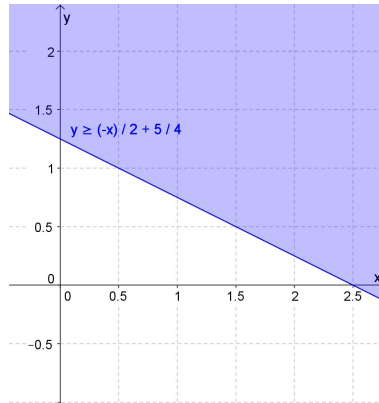
12. (a) $2(x - 4) < 5 \Leftrightarrow 2x - 8 < 5 \Leftrightarrow 2x < 13 \Leftrightarrow x < \frac{13}{2}$

(b) $\frac{1}{3}(y - 3) + 4 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(y - 3) \geq 2 - 4 \Leftrightarrow y - 3 \geq -2 \cdot 3 \Leftrightarrow y \geq -3$

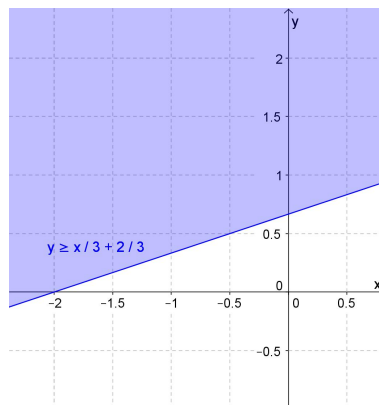
$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad |5-3x| \leq 8 &\Leftrightarrow -8 \leq 5-3x \leq 8 \Leftrightarrow -8-5 \leq -3x \leq 8-5 \Leftrightarrow \\
 -13 \leq -3x \leq 3 &\Leftrightarrow \frac{-13}{-3} \geq x \geq \frac{3}{-3} \Leftrightarrow \frac{13}{3} \geq x \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq \\
 x &\leq \frac{13}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad |2x-4| > 3 &\Leftrightarrow 2x-4 < -3 \vee 2x-4 > 3 \Leftrightarrow 2x < -3+4 \vee 2x > 3+4 \\
 &\Leftrightarrow 2x < 1 \vee 2x > 7 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

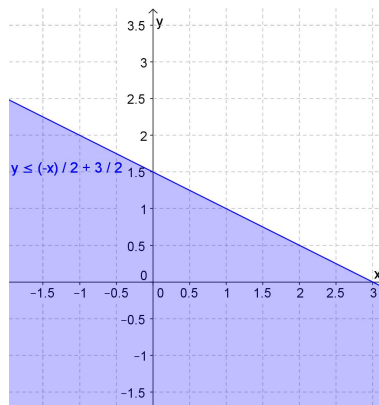
$$13. \quad \text{(a)} \quad 2x+4y \geq 5 \Leftrightarrow 4y \geq -2x+5 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$



$$\text{(b)} \quad x-3y+2 \leq 0 \Leftrightarrow x+2 \leq 3y \Leftrightarrow 3y \geq x+2 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$



$$\text{(c)} \quad 100x+200y \leq 300 \Leftrightarrow x+2y \leq 3 \Leftrightarrow 2y \leq -x+3 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Capítulo 2

Ficha 2

2.1 Exercícios: função quadrática, potências, função exponencial e logarítmica

1. Seja $f(x) = x^2 - 4x$.

(a) Complete a seguinte tabela e esboce o gráfico de f :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

(b) Determine as coordenadas do vértice do gráfico de f .

(c) Resolva $f(x) = 0$.

2. Seja $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

(a) Complete a seguinte tabela e esboce o gráfico de f :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

(b) Determine o máximo de f (coordenada y do vértice).

(c) Resolva $f(x) = 0$.

(d) Mostre que $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ e estude o sinal de $f(x)$ quando x varia.
Compare com o gráfico de f .

3. Resolva as seguintes equações:

(a) $x^2 + 7x = 0$

(c) $(x+3)(x-5) = 0$

(b) $4x^2 - 9 = 0$

(d) $x^2 - 4x + 3 = 0$

4. Simplifique:

(a) $(2x)^4$

(d)

(b) $(2^3 2^{-5})^3$

$$\frac{24x^3 y^2 z^3}{4x^2 y z^2}$$

(c) $(2^{-1} - 4^{-1})^{-1}$

(e)

$$\left[\left(\frac{x}{2} \right)^3 \cdot \frac{8}{x^{-2}} \right]^{-3}$$

5. Calcule (sem usar calculadora):

(a) $16^{1/4}$

(c) $(4^8)^{-3/16}$

(b) $5^{1/7} \cdot 5^{6/7}$

(d) $64^{1/3} + \sqrt[3]{125}$

6. Resolva as seguintes equações:

(a) $5^x = 25$

(c) $3^{3x+1} = \frac{1}{81}$

(b) $3^x = \frac{1}{3}$

(d) $10^{x^2-2x+2} = 100$

7. Se a população europeia aumentar 0,72% anualmente, quantos anos demorará a duplicar?

8. A população do Botswana era de 1,22 milhões em 1989 e estima-se que cresceu 3,4% por ano. Se $t = 0$ designar o ano 1989, determine a fórmula para a população $P(t)$ após t anos. Quantos anos demorará a duplicar?

9. Um depósito a prazo com composição anual de juros rende 12% por ano. Se depositar 100 euros, quanto terá após 15 anos?

10. Complete a seguinte tabela e esboce os gráficos de $y = 2^x$ e de $y = 2^{-x}$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x							
2^{-x}							

11. Defina uma função exponencial que contenha os seguintes pontos:

(a) $(0; 2)$ e $(2; 8)$

(b) $(0; 4)$ e $(4; 4^{-1})$

12. Exprima como múltiplos de $\ln 3$:

(a) $\ln 9$

(c) $\ln \sqrt[5]{3^2}$

(b) $\ln \sqrt{3}$

(d) $\ln \frac{1}{81}$

13. Resolva as equações:

(a) $5^x = 8$

(c) $\ln[x(x-2)] = 0$

(b) $\ln x = 3$

(d) $\ln(\sqrt{x} - 5) = 0$

14. Resolva:

(a) $3^x 4^{x+2} = 8$

(c) $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x$

(b) $3 \ln x + 2 \ln x^2 = 6$

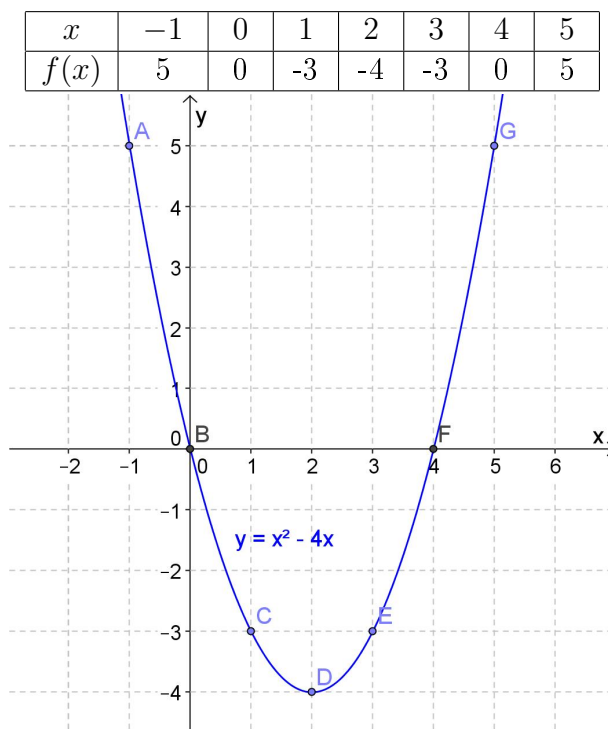
(d) $\log_x e^2 = 2$

2.2 Resoluções propostas

1. Seja $f(x) = x^2 - 4x$.

(a)

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 4(-1) = 5 & , & & f(2) &= (2)^2 - 4(2) = -4 \\ f(0) &= (0)^2 - 4(0) = 0 & , & & f(3) &= (3)^2 - 4(3) = -3 \\ f(1) &= (1)^2 - 4(1) = -3 & , & & f(4) &= (4)^2 - 4(4) = 0 \\ & & & & f(5) &= (5)^2 - 4(5) = 5 \end{aligned}$$



(b) Se $f(x) = x^2 - 4x$, então $a = 1$ e $b = -4$.

A abscissa e a ordenada do vértice são:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2, \quad V_y = f(V_x) = f(2) = -4,$$

logo as coordenadas do vértice são $(V_x, V_y) = (2, -4)$.

(c)

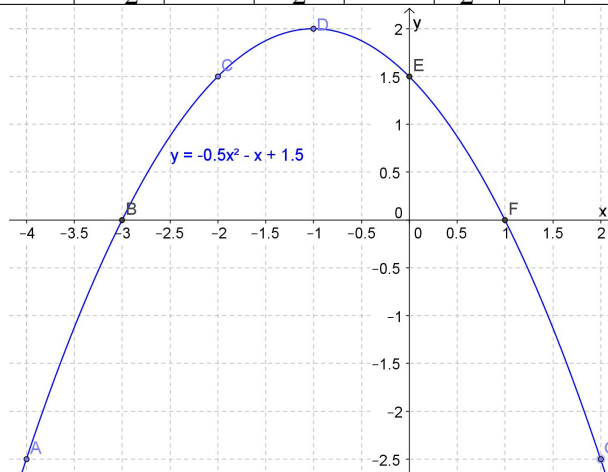
$$\begin{aligned} f(x) = 0 & \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

2. Seja $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

(a)

$$\begin{aligned} f(-4) &= -\frac{1}{2}(-4)^2 - (-4) + \frac{3}{2} = -8 + 4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \\ f(-3) &= -\frac{1}{2}(-3)^2 - (-3) + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} + 3 + \frac{3}{2} = 0 \\ f(-2) &= -\frac{1}{2}(-2)^2 - (-2) + \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} + 2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ f(-1) &= -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2 \\ f(0) &= -\frac{1}{2}(0)^2 - (0) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ f(1) &= -\frac{1}{2}(1)^2 - (1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 0 \\ f(2) &= -\frac{1}{2}(2)^2 - (2) + \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} - 2 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$



(b) Se $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$, então $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -1$.

A abscissa e a ordenada do vértice são:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot (-1/2)} = -1, \quad V_y = f(V_x) = f(-1) = 2,$$

logo o máximo de f é $f(-1) = 2$.

(c)

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 & \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2}{2} - \frac{2x}{2} + \frac{3}{2} = 0 \\
& \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \vee x^2 + 2x - 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\
& \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(x-1)(x+3) &= -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - x - 3) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = f(x)
\end{aligned}$$

		-3		1	
$-\frac{1}{2}$	-	-	-	-	-
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	-

f é negativa em $] -\infty, -3[\cup] 1, +\infty[$ e é positiva em $] -3, 1[$. Isto corresponde aos troços da parábola acima ou abaixo do eixo das abcissas.

3. (a) $x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x+7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -7$

(b) $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$

(c) $(x+3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$

(d) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

4. (a) $(2x)^4 = 2^4 x^4 = 16x^4$

(b) $(2^3 2^{-5})^3 = (2^{3-5})^3 = 2^{-2 \cdot 3} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$

(c) $(2^{-1} - 4^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

(d)

$$\frac{24x^3 y^2 z^3}{4x^2 y z^2} = \frac{24}{4} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{y^2}{y} \cdot \frac{z^3}{z^2} = 6xyz$$

(e)

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \frac{8}{x^{-2}}\right]^{-3} = \left[\frac{x^3}{2^3} \cdot 8 \cdot x^2\right]^{-3} = [x^5]^{-3} = x^{-15} = \frac{1}{x^{15}}$$

5. (a) $16^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2^{4/4} = 2^1 = 2$

$$(b) \quad 5^{1/7} \cdot 5^{6/7} = 5^{1/7+6/7} = 5^1 = 5$$

$$(c) \quad (4^8)^{-3/16} = (2^{16})^{-3/16} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$(d) \quad 64^{1/3} + \sqrt[3]{125} = (4^3)^{1/3} + (5^3)^{1/3} = 4 + 5 = 9$$

$$6. \quad (a) \quad 5^x = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$(b) \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

$$(c) \quad 3^{3x+1} = \frac{1}{81} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{3x+1} = 3^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$$

$$(d) \quad 10^{x^2-2x+2} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{x^2-2x+2} = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$$

7.

$$P(t) = P_0 \cdot \left(1 + \frac{0,72}{100}\right)^t$$

$$2P_0 = P_0 \cdot 1,0072^t \quad \Leftrightarrow \quad 1,0072^t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{1,0072} 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln 1,0072} \approx 97 \text{ anos}$$

8.

$$P(t) = 1,22 \cdot \left(1 + \frac{3,4}{100}\right)^t \quad (\text{população em milhões de habitantes})$$

$$2 \cdot 1,22 = 1,22 \cdot 1,034^t \quad \Leftrightarrow \quad 1,034^t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{1,034} 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{\ln 1,034} \approx 21 \text{ anos}$$

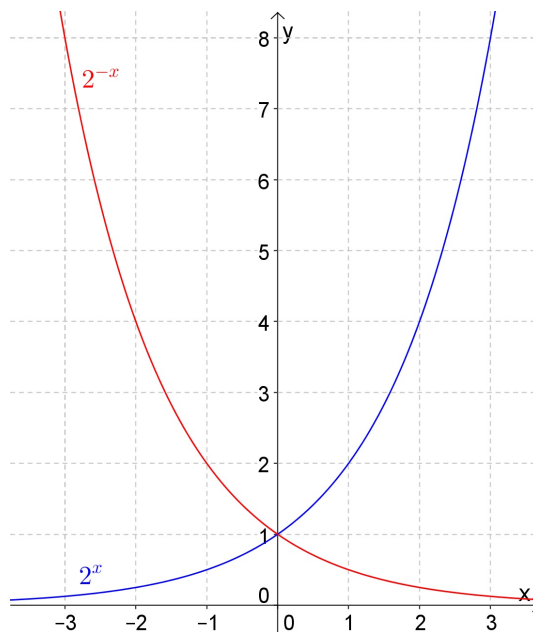
9.

$$D(t) = 100 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right)^t$$

$$D(15) = 100 \cdot 1,12^{15} = 547,36 \text{ euros}$$

10.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
2^{-x}	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



11. (a) $(0; 2)$ e $(2; 8)$

A função exponencial é da forma $f(x) = C \cdot b^x$.

De acordo com as condições do enunciado:

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \cdot b^0 = 2 \\ C \cdot b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ 2 \cdot b^2 = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Assim sendo, $f(x) = 2 \cdot 2^x$.

- (b) $(0; 4)$ e $(4; 4^{-1})$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) = 4 \\ f(4) = 4^{-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C \cdot b^0 = 4 \\ C \cdot b^4 = 4^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ 4 \cdot b^4 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b^4 = \frac{1}{4^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b^4 = \frac{1}{2^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ b = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Como a base de uma função exponencial deve ser positiva, apenas nos interessa

$$b = \frac{1}{2}, \text{ logo } f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{2-x}.$$

12. (a) $\ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3$

(b) $\ln \sqrt{3} = \ln 3^{1/2} = \frac{1}{2} \ln 3$

(c) $\ln \sqrt[5]{3^2} = \ln 3^{2/5} = \frac{2}{5} \ln 3$

(d) $\ln \frac{1}{81} = \ln 3^{-4} = -4 \ln 3$

13. (a) $5^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_5 8$
 (b) $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$
 (c) $\ln[x(x-2)] = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$
 (d) $\ln(\sqrt{x} - 5) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36$
14. (a) $3^x 4^{x+2} = 8 \Leftrightarrow 3^x 4^x 4^2 = 8 \Leftrightarrow (3 \cdot 4)^x = \frac{8}{16} \Leftrightarrow 12^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $x = \log_{12} \frac{1}{2}$
 (b) $3 \ln x + 2 \ln x^2 = 6 \Leftrightarrow 3 \ln x + 4 \ln x = 6 \Leftrightarrow 7 \ln x = 6$
 $\Leftrightarrow \ln x = \frac{6}{7} \Leftrightarrow x = e^{6/7}$
 (c) $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x \Leftrightarrow 4^x(1 - 4^{-1}) = 3^x(3 - 1)$
 $\Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{3}{4} = 3^x \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{4^x}{3^x} = \frac{4}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \log_{4/3} \frac{8}{3}$
 (d) $\log_x e^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \log_x e = 2 \Leftrightarrow \log_x e = 1 \Leftrightarrow x = e$

Capítulo 3

Ficha 3

3.1 Exercícios: derivadas

1. Calcule $f'(x)$, sem usar a regra de derivação do quociente:

(a) $f(x) = \frac{15x^3 + 6x^2 - 3x + 2}{3}$

(c) $f(x) = \frac{2x - 3}{3x^2}$

(b) $f(x) = 7x - \frac{x}{4} + \frac{3}{x^3}$

(d) $f(x) = \frac{x^3 + x - 3}{2x}$

Sugestão: recorra a técnicas semelhantes a $\frac{x-2}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = x^{-1} - 2x^{-2}$.

2. Escreva cada função na forma $f(x) = k \cdot [u(x)]^r$ e use a regra de derivação da potência para calcular $f'(x)$:

(a) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$

(c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

(d) $f(x) = \frac{10}{x^2 - 3}$

3. Calcule $\frac{dy}{dx}$ usando a regra de derivação do produto:

(a) $y = (x^2 + 3x - 5) \cdot (x^4 - x^2 + 1)$

(c) $y = x^2 \cdot (x^2 - 2x)^4$

(b) $y = \sqrt{x} \cdot (2x + 1)^3$

(d) $y = (x - x^2)^3 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

4. Calcule $\frac{dy}{dx}$ usando a regra de derivação do quociente:

(a) $y = \frac{x^2 + 1}{2x - 5}$

(c) $y = \frac{x^3}{(x - x^2)^4}$

(b) $y = \frac{\sqrt{x}}{1 - 3x}$

(d) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - 3x}}$

5. Defina $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, determine o seu domínio e use a regra de derivação da função composta para calcular $(f \circ g)'(x)$:

$$(a) \quad f(y) = y^2 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 7$$

$$(b) \quad f(y) = 2y + 7 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = 3 - 4x$$

$$(d) \quad f(x) = 3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

6. Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$(a) \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 5$$

$$(c) \quad f(x) = (x^2 - 3x)^3$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{2 - 3x}{x^2}$$

$$(d) \quad f(x) = x^2 - x + \frac{1}{1 - x}$$

3.2 Resoluções propostas

1. (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{15x^3 + 6x^2 - 3x + 2}{3} \right)' = \left(\frac{15x^3}{3} + \frac{6x^2}{3} - \frac{3x}{3} + \frac{2}{3} \right)' \\ &= \left(5x^3 + 2x^2 - x + \frac{2}{3} \right)' = 15x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

(b)

$$f'(x) = \left(7x - \frac{x}{4} + \frac{3}{x^3} \right)' = \left(7x - \frac{1}{4}x + 3x^{-3} \right)' = 7 - \frac{1}{4} - 9x^{-4}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x - 3}{3x^2} \right)' = \left(\frac{2x}{3x^2} - \frac{3}{3x^2} \right)' = \left(\frac{2}{3}x^{-1} - x^{-2} \right)' \\ &= \frac{2}{3}(-1)x^{-2} - (-2)x^{-3} = -\frac{2}{3}x^{-2} + 2x^{-3} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 + x - 3}{2x} \right)' = \left(\frac{x^3}{2x} + \frac{x}{2x} - \frac{3}{2x} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-1} \right)' = x + 0 - \frac{3}{2}(-1)x^{-2} = x + \frac{3}{2}x^{-2} \end{aligned}$$

2. (a)

$$f(x) = (2x - 1)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-2)(2x - 1)^{-3}(2)$$

(b)

$$f(x) = (x^2 - 3x)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x)^{-1/2}(2x - 3)$$

(c)

$$f(x) = 2(x^3 - x^2)^{-1/3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \left(-\frac{1}{3} \right) (x^3 - x^2)^{-4/3} (3x^2 - 2x)$$

(d)

$$f(x) = 10(x^2 - 3)^{-1} \Rightarrow f'(x) = 10(-1)(x^2 - 3)^{-2}(2x)$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 + 3x - 5)' \cdot (x^4 - x^2 + 1) + (x^2 + 3x - 5) \cdot (x^4 - x^2 + 1)' \\ &= (2x + 3) \cdot (x^4 - x^2 + 1) + (x^2 + 3x - 5) \cdot (4x^3 - 2x) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^{1/2})' \cdot (2x + 1)^3 + x^{1/2} \cdot ((2x + 1)^3)' \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot (2x + 1)^3 + x^{1/2} \cdot 3(2x + 1)^2(2) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2)' \cdot (x^2 - 2x)^4 + x^2 \cdot ((x^2 - 2x)^4)' \\ &= 2x \cdot (x^2 - 2x)^4 + x^2 \cdot 4(x^2 - 2x)^3(2x - 2) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= ((x - x^2)^3)' \cdot (x^2 + 1)^{1/2} + (x - x^2)^3 \cdot ((x^2 + 1)^{1/2})' \\ &= 3(x - x^2)^2(1 - 2x) \cdot (x^2 + 1)^{1/2} + (x - x^2)^3 \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) \end{aligned}$$

4. (a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2 + 1)' \cdot (2x - 5) - (x^2 + 1) \cdot (2x - 5)'}{(2x - 5)^2} \\ &= \frac{2x \cdot (2x - 5) - (x^2 + 1) \cdot 2}{(2x - 5)^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^{1/2})' \cdot (1 - 3x) - x^{1/2} \cdot (1 - 3x)'}{(1 - 3x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot (1 - 3x) - x^{1/2} \cdot (-3)}{(1 - 3x)^2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^3)' \cdot (x - x^2)^4 - x^3 \cdot [(x - x^2)^4]'}{[(x - x^2)^4]^2} \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x - x^2)^4 - x^3 \cdot 4(x - x^2)^3(1 - 2x)}{(x - x^2)^8} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x)' \cdot (1-3x)^{1/2} - x \cdot [(1-3x)^{1/2}]'}{[(1-3x)^{1/2}]^2} \\ &= \frac{1 \cdot (1-3x)^{1/2} - x \cdot \frac{1}{2}(1-3x)^{-1/2}(-3)}{1-3x}\end{aligned}$$

5. (a) $f(y) = y^2$ e $g(x) = 2x + 7$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2x + 7] = (2x + 7)^2$$

O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R}$. $f'(y) = 2y$ e $g'(x) = 2$, logo:

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[2x + 7] \cdot g'(x) = 2(2x + 7) \cdot 2$$

(b) $f(y) = 2y + 7$ e $g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2] = 2x^2 + 7$$

O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R}$. $f'(y) = 2$ e $g'(x) = 2x$, logo

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[x^2] \cdot g'(x) = 2 \cdot 2x$$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 3 - 4x$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[3 - 4x] = \sqrt{3 - 4x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \in \mathbb{R} : 3 - 4x \geq 0\} = \left] -\infty, \frac{3}{4} \right]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad \text{e} \quad g'(x) = -4, \quad \text{logo}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[3 - 4x] \cdot g'(x) = \frac{1}{2}(3 - 4x)^{-1/2} \cdot (-4)$$

(d) $f(x) = 3 - 4x$ e $g(x) = \sqrt{x}$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{x}] = 3 - 4\sqrt{x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\mathbb{R}_0^+$.

$$f'(x) = -4 \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad \text{logo}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[\sqrt{x}] \cdot g'(x) = -4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

6. (a)

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x^3 - 3x^2 - x + 5)' = 6x^2 - 6x \\ f''(x) &= (6x^2 - 6x)' = 12x - 6\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{2-3x}{x^2}\right)' = (2x^{-2} - 3x^{-1})' = -4x^{-3} + 3x^{-2} \\f''(x) &= (-4x^{-3} + 3x^{-2})' = 12x^{-4} - 6x^{-3}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}f'(x) &= [(x^2 - 3x)^3]' = 3(x^2 - 3x)^2(2x - 3) \\f''(x) &= [3(x^2 - 3x)^2(2x - 3)]' = 3\left(2(x^2 - 3x)(2x - 3) \cdot (2x - 3) + (x^2 - 3x)^2 \cdot 2\right) \\&= 6(x^2 - 3x)(2x - 3)^2 + 6(x^2 - 3x)^2\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}f'(x) &= [x^2 - x + (1 - x)^{-1}]' = 2x - 1 - (1 - x)^{-2}(-1) \\f''(x) &= [2x - 1 + (1 - x)^{-2}]' = 2 - 2(1 - x)^{-3}(-1)\end{aligned}$$

Capítulo 4

Ficha 4

4.1 Exercícios: primitivas

1. Calcule as seguintes derivadas e indique as respectivas fórmulas de integração:

(a) $[x \cdot (x^2 - 3)]'$

(c) $\left(\frac{1}{x^6}\right)'$

(b) $\left(\frac{x}{x^2 + 3}\right)'$

(d) $(\sqrt{x^3 + 5})'$

2. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\int x^4 dx$

(c) $\int x \cdot \sqrt[3]{x} dx$

(b) $\int x^{3/2} dx$

(d) $\int \frac{1}{x^6} dx$

3. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\int \frac{1}{2x^3} dx$

(c) $\int (x^{-3} + \sqrt{x} - 3x^{1/4} + x^2) dx$

(b) $\int (x^3 - 2x + 5) dx$

(d) $\int x(1 + x^3) dx$

4. Resolva os seguintes problemas com condição inicial:

(a) $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x}, \quad y(1) = 2.$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 0.$

5. Primitive pelo método de substituição de variável:

(a) $\int 2x^3(x^4 + 1)^{15} dx$

(c) $\int x\sqrt{x-3} dx$

(b) $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}} dx$

(d) $\int t \cdot \sqrt{7t^2 + 12} dt$

6. Primitive por partes:

(a) $\int x e^{3x} dx$

(c) $\int x \cdot \ln(x) dx$

(b) $\int x^2 e^x dx$

(d) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

7. Calcule o seguinte integral e esboce a região plana cuja área calculou:

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx$$

4.2 Resoluções propostas

1. (a) $[x \cdot (x^2 - 3)]' = [x^3 - 3x]' = 3x^2 - 3$,

$$\text{logo } \int (3x^2 - 3) dx = x \cdot (x^2 - 3) + C.$$

(b) $\left(\frac{x}{x^2 + 3}\right)' = \frac{(x)' \cdot (x^2 + 3) - x \cdot (x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{(x^2 + 3) - x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2},$

$$\text{logo } \int \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 3} + C$$

(c) $\left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{-7}, \text{ logo } \int (-6x^{-7}) dx = \frac{1}{x^6} + C$

(d) $\left(\sqrt{x^3 + 5}\right)' = \left((x^3 + 5)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 (x^3 + 5)^{-1/2} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}},$

$$\text{logo } \int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}} dx = \sqrt{x^3 + 5} + C$$

2. (a) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

(b) $\int x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5} x^{5/2} + C$

(c) $\int x \cdot \sqrt[3]{x} dx = \int x \cdot x^{1/3} dx = \int x^{4/3} dx = \frac{x^{7/3}}{7/3} + C = \frac{3}{7} x^{7/3} + C$

(d) $\int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx = \frac{x^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{5} x^{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$

3. (a) $\int \frac{1}{2x^3} dx = \int \left(\frac{1}{2} x^{-3}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^{-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4x^2} + C$

(b) $\int (x^3 - 2x + 5) dx = \int x^3 dx - \int 2x dx + \int 5 dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + 5x + C$

(c)

$$\begin{aligned} \int (x^{-3} + \sqrt{x} - 3x^{1/4} + x^2) dx &= \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} - 3 \cdot \frac{x^{5/4}}{5/4} + \frac{x^3}{3} + C \\ &= -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{12}{5} x^{5/4} + \frac{1}{3} x^3 + C \end{aligned}$$

$$(d) \int x(1+x^3) dx = \int (x+x^4) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + C$$

$$4. (a) \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow y(x) = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C.$$

$$\text{Usando a condição inicial: } y(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} (1)^{4/3} + C = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{5}{4}, \text{ logo } y(x) = \frac{3}{4} x^{4/3} + \frac{5}{4}.$$

$$(b) \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow y(x) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx \Leftrightarrow y(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2 x^{1/2} + C.$$

$$\text{Usando a condição inicial: } y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^{3/2} + 2 x^{1/2} + C = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{8}{3}, \text{ logo } y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2 x^{1/2} - \frac{8}{3}.$$

5. (a) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$y = x^4 + 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 \Leftrightarrow dy = 4x^3 dx, \quad \text{logo :}$$

$$\begin{aligned} \int 2x^3(x^4+1)^{15} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{(x^4+1)^{15}}_y \cdot \underbrace{2 \cdot 2x^3 dx}_{dy} = \frac{1}{2} \cdot \int y^{15} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{16}}{16} + C = \\ &= \frac{1}{32} y^{16} + C = \frac{1}{32} (x^4+1)^{16} + C. \end{aligned}$$

(b) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$y = 4x^2+5 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 8x \Leftrightarrow dy = 8x dx \Leftrightarrow \frac{3}{8} dy = 3x dx, \quad \text{logo :}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}} dx &= \int \underbrace{(4x^2+5)^{-1/2}}_y \cdot \underbrace{3x dx}_{\frac{3}{8} dy} = \int y^{-1/2} \cdot \frac{3}{8} dy = \frac{3}{8} \cdot \int y^{-1/2} dy = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{y^{1/2}}{1/2} + C = \frac{3}{4} y^{1/2} + C = \frac{3}{4} (4x^2+5)^{1/2} + C = \frac{3}{4} \sqrt{4x^2+5} + C. \end{aligned}$$

(c) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$y = x - 3 \Leftrightarrow x = y + 3 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow dy = dx, \quad \text{logo :}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{y+3} \cdot \underbrace{\sqrt{x-3}}_{\sqrt{y}} \underbrace{dx}_{dy} &= \int (y+3) \cdot y^{1/2} dy = \int (y^{3/2} + 3y^{1/2}) dy = \\ &= \frac{y^{5/2}}{5/2} + 3 \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{5} y^{5/2} + 2 y^{3/2} + C = \frac{2}{5} (x-3)^{5/2} + 2 (x-3)^{3/2} + C \end{aligned}$$

(d) Cálculo auxiliar (substituição de variável):

$$s = 7t^2 + 12 \quad ; \quad \frac{ds}{dt} = 14t \quad \Leftrightarrow \quad ds = 14t \, dt \quad , \quad \text{logo :}$$

$$\begin{aligned} \int t \cdot \sqrt{7t^2 + 12} \, dt &= \frac{1}{14} \cdot \int \underbrace{(7t^2 + 12)}_s^{1/2} \cdot \underbrace{14t \, dt}_{ds} = \frac{1}{14} \cdot \int s^{1/2} \, ds = \frac{1}{14} \cdot \frac{s^{3/2}}{3/2} + C = \\ &= \frac{1}{21} \cdot s^{3/2} + C = \frac{1}{21} (7t^2 + 12)^{3/2} + C \end{aligned}$$

6. Fórmula de primitivação por partes:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

(a) Cálculo auxiliar:

$$u = x \quad , \quad v' = e^{3x} \quad ; \quad u' = 1 \quad , \quad v = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{3x}}_{v'} \, dx &= \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{e^{3x}}{3}}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{e^{3x}}{3}}_v \, dx \\ &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C . \end{aligned}$$

(b) Cálculo auxiliar (1):

$$u = x^2 \quad , \quad v' = e^x \quad ; \quad u' = 2x \quad , \quad v = e^x$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx &= \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_v \, dx \\ &= x^2 e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x \, dx . \end{aligned}$$

Iremos de fazer um segundo cálculo auxiliar (2):

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx = \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_v \, dx = x e^x - e^x + C$$

e finalmente concluimos que:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \cdot \underbrace{(x e^x - e^x)}_{\int x \cdot e^x \, dx} + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$$

(c) Cálculo auxiliar:

$$u = \ln(x) \quad , \quad v' = x \quad ; \quad u' = \frac{1}{x} \quad , \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{x}_{v'} dx &= \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v dx \\ &= \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

(d) Cálculo auxiliar:

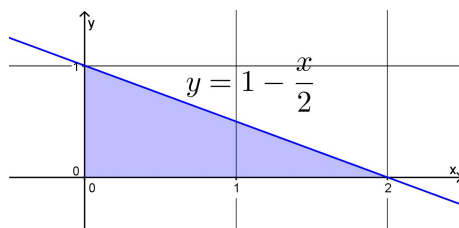
$$u = \ln(x) \quad , \quad v' = x^{-1/2} \quad ; \quad u' = \frac{1}{x} \quad , \quad v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2x^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{x^{-1/2}}_{v'} dx &= \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{2x^{1/2}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{2x^{1/2}}_v dx \\ &= \ln(x) \cdot 2x^{1/2} - 2 \cdot \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} \ln(x) - 4x^{1/2} + C \end{aligned}$$

7. Cálculo auxiliar:

$$F(x) = \int \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{x^2}{4} + C .$$

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \left(2 - \frac{2^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{4}\right) = 2 - 1 = 1 .$$



Capítulo 5

Ficha 5

5.1 Exercícios: integrais e áreas

1. Calcule:

(a) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

(c) $\int_0^2 |2x - 3| dx$

(b) $\int_4^9 2x \sqrt{x} dx$

(d) $\int_1^2 x(1 + x^3) dx$

2. Calcule a área da região plana sob a curva $y = x^2 + 1$ no intervalo $[0, 3]$. Esboce essa região.

3. Determine a área da região plana compreendida acima do eixo do x e abaixo da curva $y = (1 - x)(x - 2)$. Esboce essa região.

4. Esboce o conjunto

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq -x + 1 \}$$

e calcule a sua área através de um integral.

5. Considere $f(t) = 6t^2 + 2t$.

(a) Calcule

$$\int f(t) dt$$

(b) Calcule

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

(c) Calcule

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x f(t) dt \right] = \frac{d}{dx} [F(x)]$$

6. Seja f uma função ímpar. Prove que:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

7. Seja f uma função par. Prove que:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

5.2 Resoluções propostas

1. (a) Cálculo auxiliar:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Logo, pelo T.F.C.:

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = \left(-\frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{2}{3}$$

(b) Cálculo auxiliar:

$$\int 2x \sqrt{x} dx = 2 \int x^{3/2} dx = 2 \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{4}{5} x^{5/2} + C$$

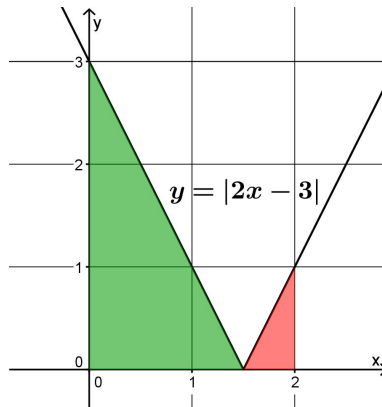
Logo, pelo T.F.C.:

$$\int_4^9 2x \sqrt{x} dx = \left[\frac{4}{5} x^{5/2} \right]_4^9 = \left(\frac{4}{5} \cdot 9^{5/2} \right) - \left(\frac{4}{5} \cdot 4^{5/2} \right) = \frac{4}{5} (3^5 - 2^5)$$

(c) A função $|2x - 3|$ só pode ser primitivada depois de a definirmos por ramos:

$$|2x - 3| = \begin{cases} -(2x - 3) & \text{se } 2x - 3 < 0 \\ 2x - 3 & \text{se } 2x - 3 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x < \frac{3}{2} \\ 2x - 3 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } \int_0^2 |2x - 3| dx = \int_0^{3/2} (-2x + 3) dx + \int_{3/2}^2 (2x - 3) dx$$



Cálculos auxiliares:

$$\int_0^{3/2} (-2x + 3) dx = \left[-x^2 + 3x \right]_0^{3/2} = \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} \right) - \left(0 \right) = \frac{9}{4}$$

$$\int_{3/2}^2 (2x - 3) dx = \left[x^2 - 3x \right]_{3/2}^2 = \left(2^2 - 3 \cdot 2 \right) - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

Logo:

$$\int_0^2 |2x - 3| dx = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

(d) Cálculo auxiliar:

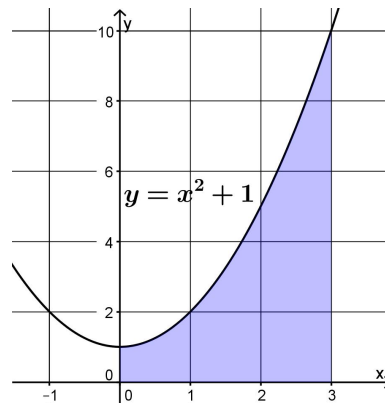
$$\int x(1 + x^3) dx = \int (x + x^4) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + C$$

Logo, pelo T.F.C.:

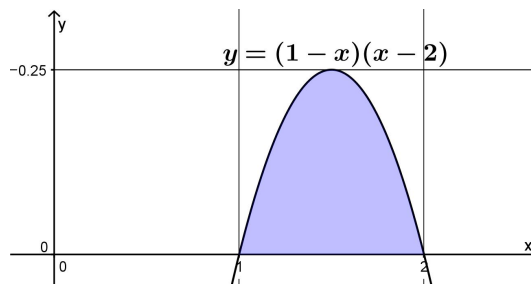
$$\int_1^2 x(1 + x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} + \frac{2^5}{5} \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1^5}{5} \right) = \frac{77}{10}$$

2. Como $y = x^2 + 1$ é uma função não negativa, a área pedida calcula-se através de:

$$\int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3 \right) - \left(0 \right) = 12$$



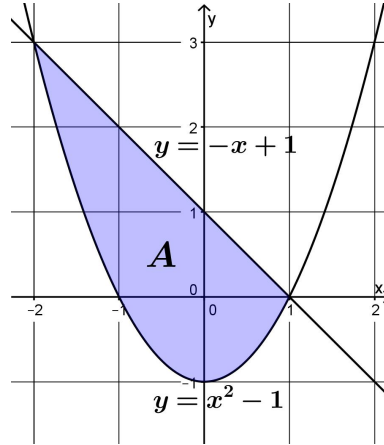
3. O conjunto definido por $0 \leq y \leq (1 - x)(x - 2) \Leftrightarrow 0 \leq y \leq -x^2 + 3x - 2$ é:



e a sua área calcula-se através de:

$$\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 3 \cdot \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) = \frac{1}{6}$$

4.



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 \left((-x + 1) - (x^2 - 1) \right) dx = \int_{-2}^1 \left(-x^2 - x + 2 \right) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 4 \right) = 11 \end{aligned}$$

5. (a)

$$\int f(t) dt = \int (6t^2 + 2t) dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + 2 \cdot \frac{t^2}{2} + C = 2t^3 + t^2 + C$$

(b) Pelo T.F.C.:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \left[2t^3 + t^2 \right]_0^x = \left(2x^3 + x^2 \right) - \left(0 \right) = 2x^3 + x^2$$

(c)

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x f(t) dt \right] = \frac{d}{dx} [2x^3 + x^2] = 6x^2 + 2x = f(x)$$

6. Cálculo auxiliar, com mudança de variável $x = -y$ e $dx = (-1) dy$:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-y) \cdot (-1) dy = - \int_a^0 f(-y) dy = \int_0^a f(-y) dy$$

Mas como f é ímpar, então $f(-y) = -f(y)$, logo:

$$\int_0^a f(-y) dy = - \int_0^a f(y) dy = - \int_0^a f(x) dx$$

Finalmente:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

7. O raciocínio é idêntico ao da pergunta anterior, com a seguinte diferença: se f é par, então $f(-y) = f(y)$. Assim,:

$$\int_0^a f(-y) dy = \int_0^a f(y) dy = \int_0^a f(x) dx$$

logo:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Capítulo 6

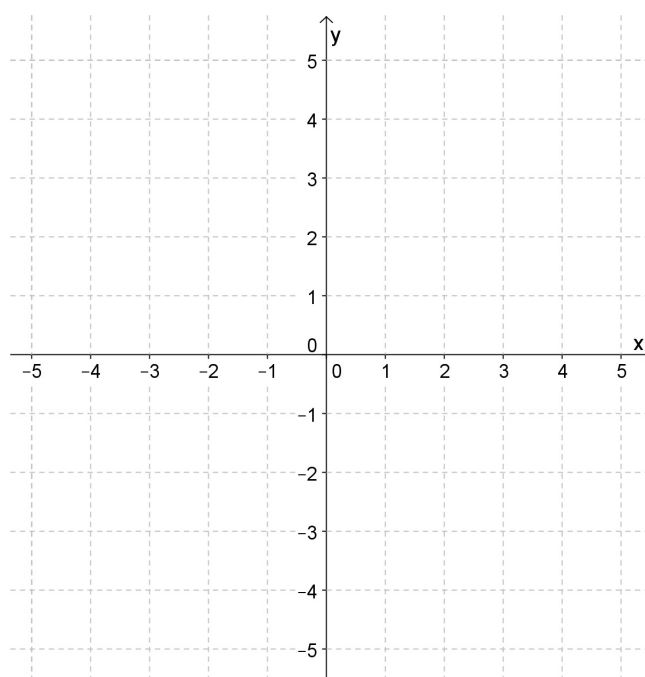
Teste 1, de 4 de Novembro de 2013

6.1 Enunciado

1. Considere $f(x) = 3x - 2$.

(a) Complete a tabela e esboce o gráfico $y = f(x)$:

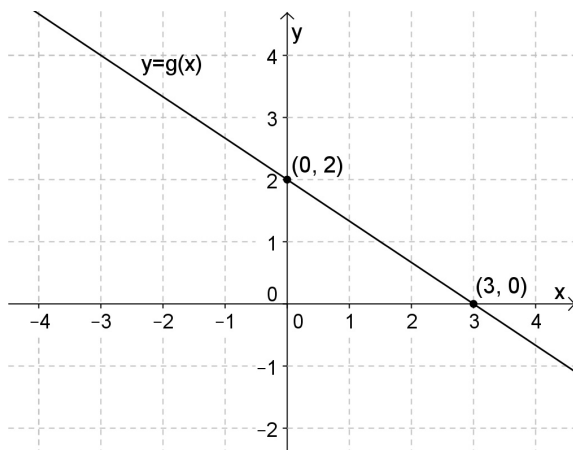
x	$y = f(x)$
-1	
0	
1	
2	



(b) Determine o(s) zero(s) da função f e resolva $f(x) \geq 0$.

(c) Defina a equação da recta paralela a $y = f(x)$ e que contém o ponto $(-2; -1)$.

2. Considere a seguinte recta:



reduzida $\left(m = \frac{\Delta y}{\Delta x}, y = mx + b\right)$
desta recta.

(b) Resolva algebricamente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -\frac{2}{3}x + y = 0 \end{cases}$$

(c) Represente a tracejado a região do plano que satisfaz:

$$2x + 3y > 6 \quad \wedge \quad -\frac{2}{3}x + y > 0$$

(a) Determine o declive e a equação

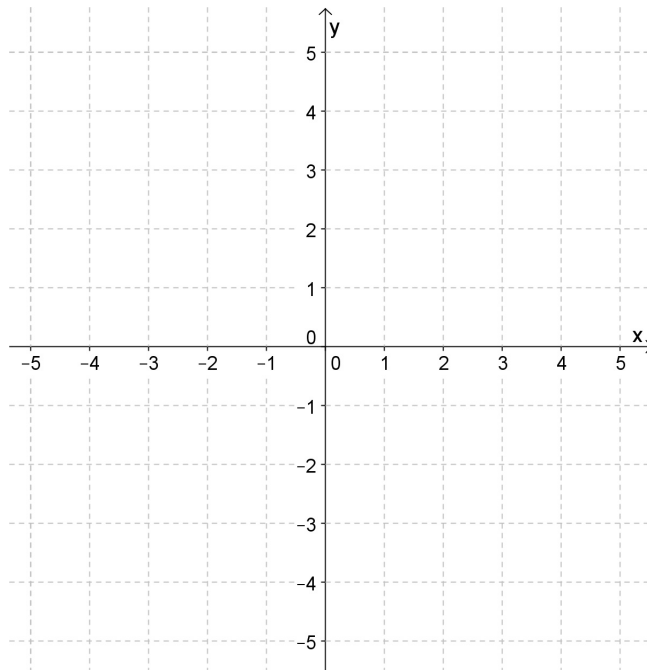
3. Considere $h(x) = x^2 - 2x - 3$.

(a) Determine os zeros de h e escreva $h(x)$ na forma factorizada.

$$\left(ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad V_x = \frac{-b}{2a}\right)$$

(b) Determine o vértice $(V_x; V_y)$, complete a tabela e esboce o gráfico $y = h(x)$:

x	$y = h(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



(c) Determine o conjunto-solução de $h(x) \geq 0$.

4. Considere um depósito a prazo com composição anual de juros à taxa anual de 15%.

Quantos anos serão necessários para um depósito inicial de 100 euros aumentar 45% ?

Apresente a resposta como uma expressão algébrica, sem calculá-la.

$$\left(C(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \right)$$

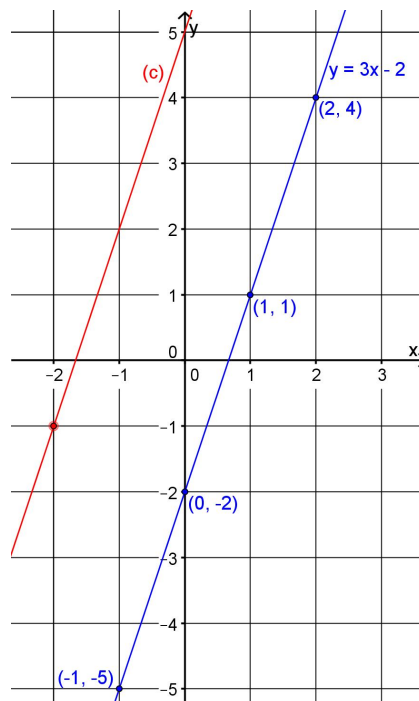
5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, mostre que:

$$-\log_n \left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} \right) = 3$$

6.2 Resolução proposta

1. (a)

x	$y = f(x)$
-1	$3 \times (-1) - 2 = -5$
0	$3 \times (0) - 2 = -2$
1	$3 \times (1) - 2 = 1$
2	$3 \times (2) - 2 = 4$



- (b) Os zeros de f são as soluções de:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

A resolução da inequação é:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

(c) Sendo a recta paralela, terá o mesmo declive: $m = 3$.

Aplicando a equação da recta na forma ponto-declive:

$$y - (-1) = 3(x - (-2)) \Leftrightarrow y + 1 = 3(x + 2) \Leftrightarrow y = 3x + 5$$

2. (a)

$$b = 2; m = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}; \text{ logo } y = -\frac{2}{3}x + 2$$

(b)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ -\frac{2}{3}x + y = 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ y = \frac{2}{3}x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3 \cdot \frac{2}{3}x = 6 \\ y = \frac{2}{3}x \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x = 6 \\ y = \frac{2}{3}x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{3}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

(c)

$$2x + 3y > 6 \wedge -\frac{2}{3}x + y > 0 \Leftrightarrow y > -\frac{2}{3}x + 2 \wedge y > \frac{2}{3}x$$

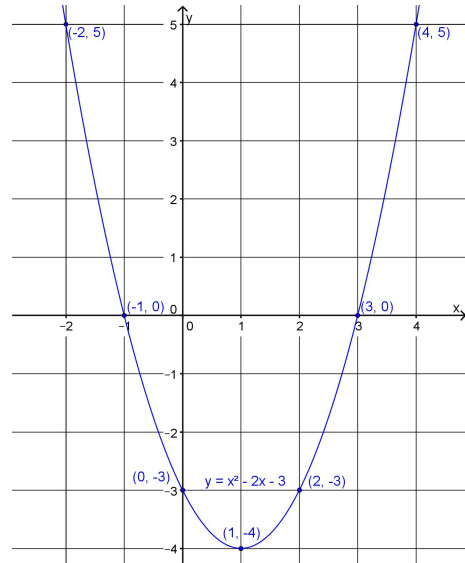
3. (a) Os zeros de h são as soluções de:

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

A forma factorizada é: $h(x) = (x - (-1))(x - 3) = (x + 1)(x - 3)$.

(b) $V_x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$ e $V_y = h(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = -4$, logo $(V_x; V_y) = (1; -4)$.

x	$y = x^2 - 2x - 3$
-2	$(-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$
-1	$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$
0	$(0)^2 - 2 \cdot (0) - 3 = -3$
1	$(1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = -4$
2	$(2)^2 - 2 \cdot (2) - 3 = -3$
3	$(3)^2 - 2 \cdot (3) - 3 = 0$
4	$(4)^2 - 2 \cdot (4) - 3 = 5$



(c)

$$\begin{aligned}
 h(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 3 \\
 &\Leftrightarrow C.S. =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[
 \end{aligned}$$

4.

$$145 = 100 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^t \Leftrightarrow 1,15^t = 1,45 \Leftrightarrow t = \log_{1,15} 1,45 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1,45}{\ln 1,15}$$

5. Cálculo auxiliar:

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = \left[(n^{1/n})^{1/n} \right]^{1/n} = n^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = n^{(1/n^3)}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 -\log_n \left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} \right) &= -\log_n \left(\log_n n^{(1/n^3)} \right) = -\log_n \left(\frac{1}{n^3} \log_n n \right) = \\
 &= -\log_n \left(\frac{1}{n^3} \right) = -\log_n (n^{-3}) = -(-3) \log_n n = 3
 \end{aligned}$$

Capítulo 7

Teste 2, de 5 de Dezembro de 2013

7.1 Enunciado

1. Calcule:

(a)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^4 + 4x^2 - 6x}{2x^2} \right)$$

(b)

$$\frac{d}{dx} \left((3x + e^{7x})^5 \right)$$

(c)

$$\frac{d}{dx} \left((2x + 1)^4 \cdot \sqrt{x - 1} \right)$$

2. Considere:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 2$$

(a) Determine os pontos de estacionariedade de f .

(b) Defina os intervalos de monotonia e calcule os extremos locais de f .

(c) A restrição de f ao intervalo $[0, 4]$ tem extremos absolutos. Explique porquê e determine-os.

3. Sejam

$$f(u) = \ln(\ln u) \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1$$

- (a) Determine o domínio de f e calcule $f'(u)$.
- (b) Calcule $(f \circ g)(x)$ e determine o seu domínio (recorde que $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$).
- (c) Use a regra da cadeia, $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$, para calcular $(f \circ g)'(x)$.

4. Sejam

$$f(x) = x^{2/3}, \quad a = -1 \quad \text{e} \quad b = 8$$

- (a) Prove que não existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- (b) Explique por que razão a proposição da alínea anterior não contradiz o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

5. Determine a e b (em função de $c > 0$) de forma a que $f'(c)$ exista:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & , \text{ se } |x| > c, \\ a + bx^2 & , \text{ se } |x| \leq c \end{cases}$$

Sugestão: considere as condições para haver continuidade e diferenciabilidade em $x = c$.

7.2 Resolução proposta

1. (a)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^4 + 4x^2 - 6x}{2x^2} \right) = \left(\frac{2x^4}{2x^2} + \frac{4x^2}{2x^2} - \frac{6x}{2x^2} \right)' = (x^2 + 2 - 3x^{-1})' = 2x + 3x^{-2}.$$

(b)

$$\frac{d}{dx} \left((3x + e^{7x})^5 \right) = 5 (3x + e^{7x})^4 (3x + e^{7x})' = 5 (3x + e^{7x})^4 (3 + 7e^{7x}).$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left((2x+1)^4 \cdot \sqrt{x-1} \right) &= [(2x+1)^4]' \cdot \sqrt{x-1} + (2x+1)^4 \cdot [(x-1)^{1/2}]' \\ &= 4(2x+1)^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-1} + (2x+1)^4 \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} \\ &= 8(2x+1)^3 \cdot \sqrt{x-1} + \frac{(2x+1)^4}{2 \cdot \sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

2. Seja

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 2$$

(a) Os pontos de estacionariedade de f são as soluções de $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 9x + 2 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 9 = x^2 - 9.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Assim, os pontos de estacionariedade de f são $\{-3, 3\}$.

(b) Para estudar a monotonia e os extremos locais, construímos a seguinte tabela:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	

Concluimos que f é crescente em $] -\infty, -3]$ e em $[3, +\infty[$ e decrescente em $[-3, 3]$. f tem um máximo local $f(-3) = 20$ e um mínimo local $f(3) = -16$.

(c) O *Teorema do Valor Extremo* afirma que uma função contínua num intervalo fechado tem máximo e mínimo absoluto.

f é contínua em $\mathbb{R}$ (polinómio), logo tem máximo e mínimo absoluto em $[0, 4]$.

Considerando $f(3) = -16$ (mínimo local), $f(0) = 2$ e $f(4) = -12 - \frac{2}{3}$, concluimos que a restrição de f a $[0, 4]$ tem máximo absoluto $f(0) = 2$ e mínimo absoluto $f(3) = -16$.

Gráfico de $y = \frac{x^3}{3} - 9x + 2$

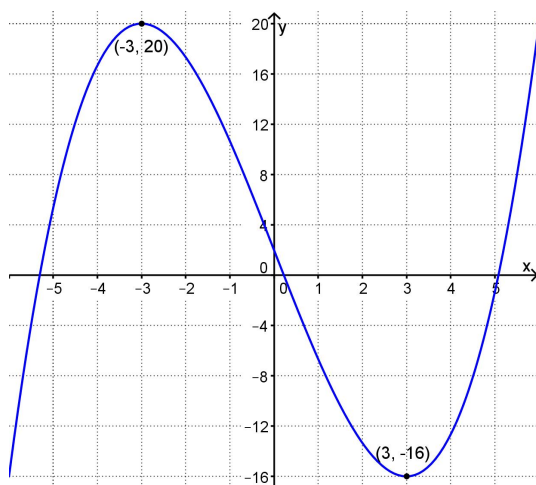
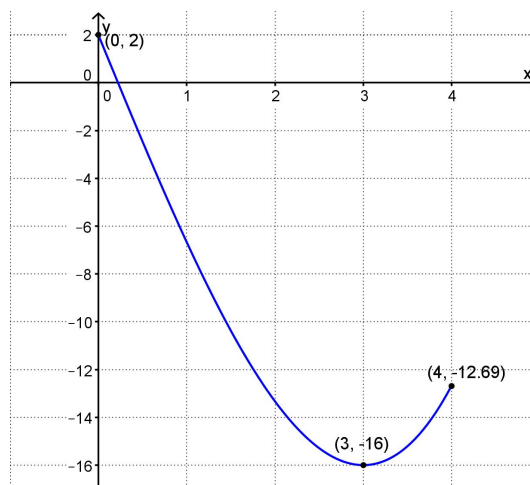


Gráfico da restrição de $f(x)$ a $[0, 4]$



3. (a) Seja $f(u) = \ln(\ln u)$. O seu domínio é:

$$D_f = \{ u \in \mathbb{R} \mid u > 0 \wedge \ln u > 0 \} =]1, +\infty[,$$

uma vez que $u > 0 \wedge \ln u > 0 \Leftrightarrow u > 0 \wedge u > 1 \Leftrightarrow u > 1$.

A sua derivada é:

$$f'(u) = \left[\ln(\ln u) \right]' = \frac{(\ln u)'}{\ln u} = \frac{\frac{1}{u}}{\ln u} = \frac{1}{u \ln u}$$

- (b) Seja $g(x) = x^2 - 1$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2 - 1] = \ln[\ln(x^2 - 1)]$$

e o seu domínio é:

$$D_{f \circ g} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0 \wedge \ln(x^2 - 1) > 0 \} .$$

Resolvendo:

$$x^2 - 1 > 0 \wedge \ln(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \wedge x^2 - 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 1 \wedge x^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} ,$$

concluimos que $D_{f \circ g} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

- (c) Sabemos que $f'(u) = \frac{1}{u \ln u}$ (alínea a)) e que $g'(x) = 2x$. Pela regra da cadeia:

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[x^2 - 1] \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 - 1) \ln(x^2 - 1)}$$

4. (a) Sejam:

$$f(x) = x^{2/3} \quad ; \quad f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} .$$

$$\begin{aligned} \frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)} &= \frac{8^{2/3} - (-1)^{2/3}}{9} = \frac{[8^{1/3}]^2 - [(-1)^{1/3}]^2}{9} \\ &= \frac{[2]^2 - [-1]^2}{9} = \frac{4 - 1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Então:

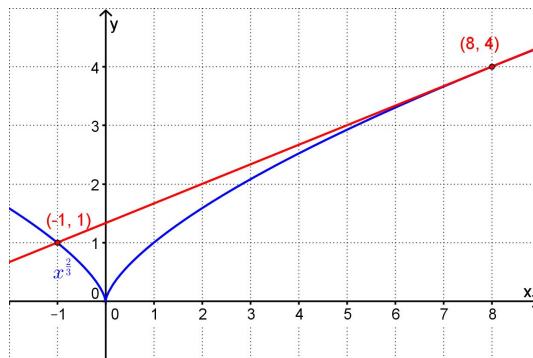
$$f'(c) = \frac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{c}} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{c} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad c = 8 .$$

Mas $8 \notin]-1, 8[$, como queríamos demonstrar.

(b) A função f não tem derivada em $x = 0$, pois $f'(0)$ não existe.

$$(f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \text{ não está definida em } x = 0)$$



Se f não é diferenciável em $] -1, 8[$, não estão reunidas as condições para aplicar o *Teorema do Valor Médio de Lagrange*.

5. Como $c > 0$, basta considerar $f(x)$ para $x > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & , \text{ se } 0 < x \leq c \\ \frac{1}{x} & , \text{ se } c < x \end{cases}$$

A condição de continuidade em $x = c$ será: $a + bc^2 = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad a + bc^2 = \frac{1}{c} .$

As derivadas de cada um dos ramos de f são:

$$\frac{d}{dx}(a + bx^2) = 2bx \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} .$$

A condição de diferenciabilidade em $x = c$ será $2bc = -\frac{1}{c^2} .$

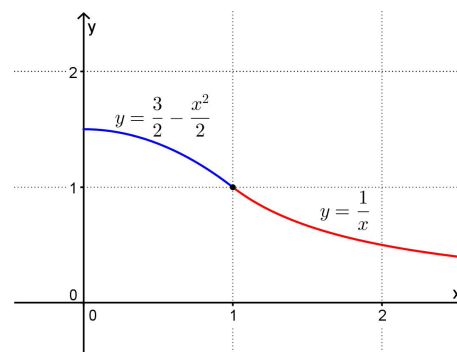
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + bc^2 = \frac{1}{c} \\ 2bc = -\frac{1}{c^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{1}{c} - bc^2 \\ b = -\frac{1}{2c^3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{c} + \frac{c^2}{2c^3} \\ b = -\frac{1}{2c^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2c} \\ b = -\frac{1}{2c^3} \end{cases}$$

Exemplo com $c = 1$, logo $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 & , \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & , \text{ se } 1 < x \end{cases}$$



Capítulo 8

Teste 3, de 24 de Janeiro de 2014

8.1 Enunciado

1. (a) Calcule:

$$\int \left(\frac{2}{x^3} - x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 \right) dx$$

- (b) Seja $F(x)$ uma função (com domínio $\mathbb{R}^+$), tal que:

$$F'(x) = \frac{2}{x^3} - x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 \quad \text{e} \quad F(1) = 3 .$$

Determine $F(x)$.

2. (a) Use o método de primitivação por substituição de variável para calcular:

$$\int (x^3 - 1)^8 \cdot 9x^2 \, dx$$

(Nota: apresente explicitamente a nova variável e os respectivos cálculos)

- (b) Calcule:

$$\int_0^1 (x^3 - 1)^8 \cdot 9x^2 \, dx$$

3. Use o método de primitivação por partes $\left(\int u v' \, dx = u v - \int u' v \, dx \right)$ para calcular:

(a) $\int x \cdot e^{-3x} \, dx$

(b) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$

4. (a) Esboce o seguinte conjunto:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| \leq y \leq 2 - (x - 1)^2 \}$$

- (b) Calcule a área de A .

(Nota: se não resolveu a alínea a), calcule $\int_{-1}^2 |1 - x^2| dx$).

5. Seja $f(x)$ uma função ímpar e contínua em $\mathbb{R}$. Prove que:

- (a)

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{é uma função par.}$$

- (b)

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^x f(t) dt = 0 \quad , \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Nas alíneas anteriores, justifique cuidadosamente todos os passos.

8.2 Resolução proposta

1. (a)

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2}{x^3} - x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 \right) dx &= \int (2x^{-3} - x^{3/2} + 2x^4) dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} + 2 \cdot \frac{x^5}{5} + C = -x^{-2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2}{5} x^5 + C \end{aligned}$$

- (b) $F(x) = -x^{-2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2}{5} x^5 + C$, onde C é determinado pela condição:

$$F(1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = 4.$$

2. (a) Façamos $y = x^3 - 1$ e $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad dy = 3x^2 dx$.

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 1)^8 \cdot 9x^2 dx &= 3 \cdot \int \underbrace{(x^3 - 1)^8}_y \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{dy} = 3 \cdot \int y^8 dy = \\ &= 3 \cdot \frac{y^9}{9} + C = \frac{1}{3} (x^3 - 1)^9 + C \end{aligned}$$

- (b)

$$\int_0^1 (x^3 - 1)^8 \cdot 9x^2 dx = \left[\frac{1}{3} (x^3 - 1)^9 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} (-1)^9 = \frac{1}{3}$$

3. Fórmula de primitivação por partes: $\int u v' dx = u v - \int u' v dx$

(a) $u = x, u' = 1, v' = e^{-3x}, v = \frac{e^{-3x}}{-3}.$

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{v'} dx = \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{e^{-3x}}{-3}}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{e^{-3x}}{-3}}_v dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} + C$$

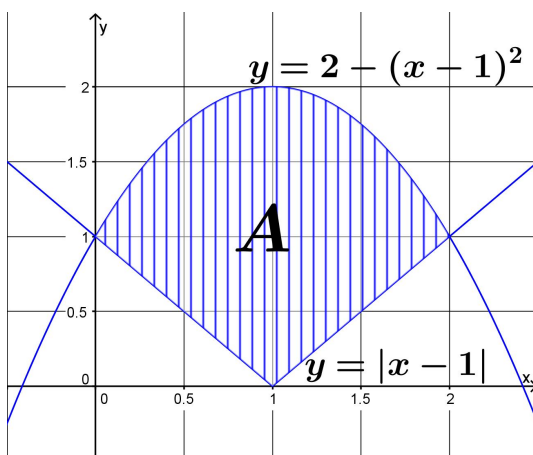
(b) $u = \ln(x), u' = \frac{1}{x}, v' = x^{-2}, v = -x^{-1}.$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{x^{-2}}_{v'} dx &= \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{(-x^{-1})}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{(-x^{-1})}_v dx = \\ &= -\ln(x) \cdot x^{-1} + \int x^{-2} dx = -\ln(x) \cdot x^{-1} - x^{-1} + C = -\frac{1}{x} (\ln(x) + 1) + C \end{aligned}$$

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} (\ln(x) + 1) \right]_1^e = \left[\frac{1}{x} (\ln(x) + 1) \right]_e^1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$$

4. (a)

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| \leq y \leq 2 - (x-1)^2 \}$$



(b) A área de A é:

$$\int_0^1 \left[\underbrace{2 - (x-1)^2}_{f(x)} - \underbrace{(1-x)}_{g(x)} \right] dx + \int_1^2 \left[\underbrace{2 - (x-1)^2}_{f(x)} - \underbrace{(-1+x)}_{g(x)} \right] dx$$

Contudo, dada a simetria da figura, os dois integrais são iguais, e a área será:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^1 \left[2 - (x-1)^2 - (1-x) \right] dx &= 2 \cdot \int_0^1 (-x^2 + 3x) dx = \\ &= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) = 2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

5. (a) Fazendo uma mudança de variável $s = -t \Leftrightarrow t = -s, \frac{dt}{ds} = -1 \Leftrightarrow dt = (-1) ds$:

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x \underbrace{f(-s)}_t \cdot \underbrace{(-1) ds}_{dt} = \int_0^x -f(-s) ds =$$

mas como f é ímpar, $-f(-s) = f(s)$, teremos:

$$= \int_0^x f(s) ds = F(x),$$

ficando assim provado que $F(x)$ é par.

- (b) Como f é contínua, f é integrável e

$$\int_{-x}^x f(t) dt = F(x) - F(-x) = 0, \text{ porque } F \text{ é par.}$$

Logo

$$\frac{d}{dx} \int_{-x}^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (0) = 0.$$

Capítulo 9

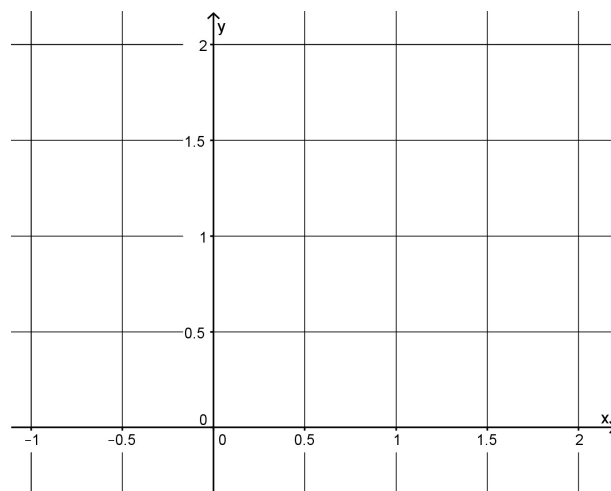
Exame Final, de 6 de Fevereiro de 2014

9.1 Enunciado

1. Seja $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

(a) Complete a tabela e esboce o gráfico $y = f(x)$:

x	$y = f(x)$
-1	
0	
1	
2	

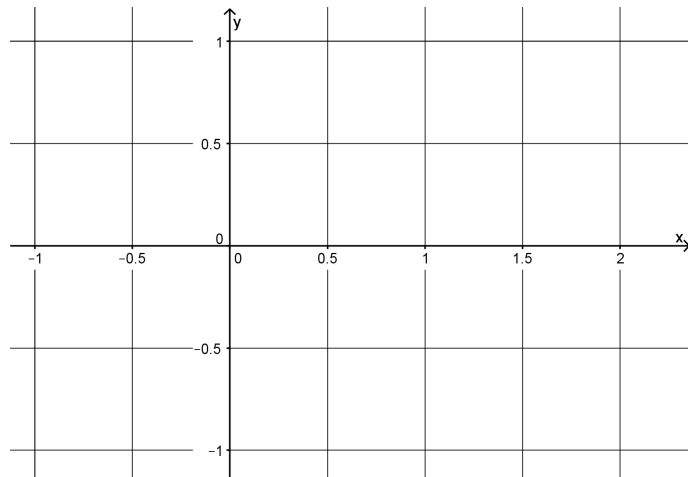


- (b) Esboce a recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1) = (-\frac{1}{2}; 0)$ e $(x_2; y_2) = (0; 1)$ e determine a sua equação reduzida.

2. (a) Resolva algebricamente:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- (b) Esboce (a tracejado) o conjunto: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 1 \leq y \leq x - 1\}$.



3. Calcule:

(a)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{4x^3 + 8x - 3}{2x} \right]$$

(b)

$$\frac{d}{dx} \left[x^2 \cdot (x^5 - e^{2x})^4 \right]$$

4. Sejam

$$f(u) = \frac{e^u}{1 - e^u} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

(a) Defina $(f \circ g)(x)$ e determine o seu domínio.

(b) Use a regra da cadeia, $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$, para calcular $(f \circ g)'(x)$.

5. Calcule cada integral e esboce o conjunto cuja área calculou:

(a)

$$\int_1^4 (\sqrt{x} + 1) \, dx$$

(b)

$$\int_{-1}^2 |x - 1| \, dx$$

6. Calcule:

(a)

$$\int x \cdot \sqrt{x - 1} \, dx$$

(b)

$$\int x^2 \cdot \ln(x) \, dx$$

7. Seja f uma função contínua, tal que

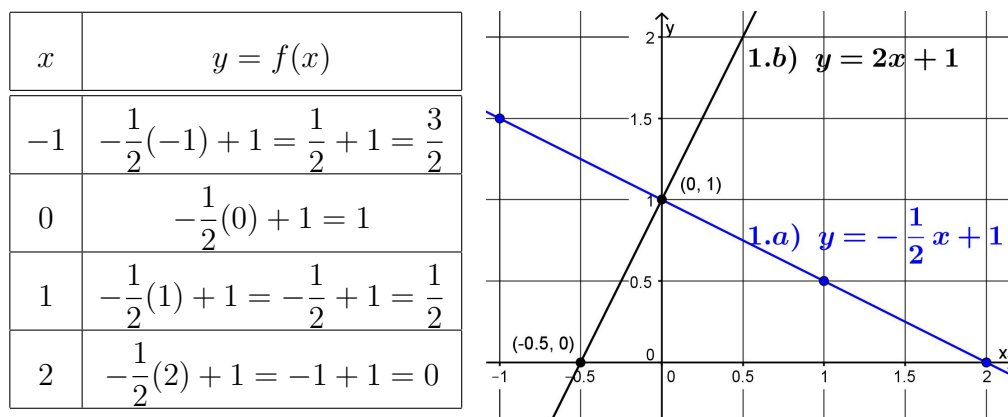
$$\int_0^x f(t) dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determine uma fórmula explícita para $f(x)$.

9.2 Resolução proposta

1. Seja $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

(a) Eis a tabela auxiliar e o gráfico da recta $y = -\frac{1}{2}x + 1$:



Observação: a recta tem declive $m = -\frac{1}{2}$ e ordenada na origem $b = 1$.

(b) O esboço desta recta está feito no mesmo sistema de eixos da alínea anterior. Como $(x_1; y_1) = (-\frac{1}{2}; 0)$ e $(x_2; y_2) = (0; 1)$ pertencem à recta, o seu declive é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$(x_2; y_2) = (0; 1)$ é a intersecção da recta com o eixo das ordenadas (y), logo $b = 1$.

Portanto, a equação reduzida da recta é: $y = 2x + 1$.

2. (a)

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = y \\ x - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = x - 1 \\ x - 1 = y \end{cases}$$

Fazendo um cálculo auxiliar para a primeira equação:

$$x^2 - 2x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Retornando ao sistema, teremos então;

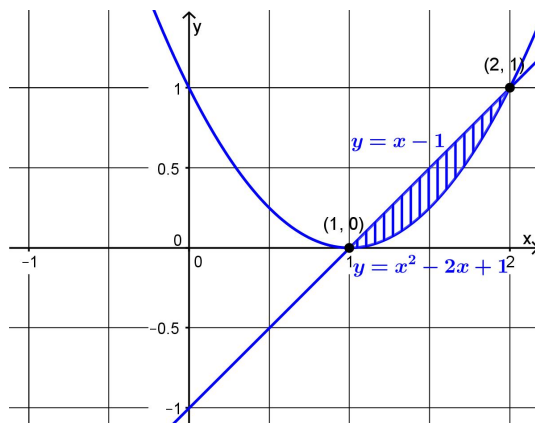
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

- (b) O conjunto: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 1 \leq y \leq x - 1\}$ está definido na forma $g(x) \leq y \leq f(x)$, portanto basta esboçar os gráficos $y = f(x)$, $y = g(x)$ e assinalar a região compreendida simultaneamente abaixo do gráfico de f e acima do gráfico de g .

$y = x - 1$ define a recta com declive $m = 1$ e $b = -1$.

$y = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow y = (x - 1)^2$ define uma parábola com vértice em $(1, 0)$, que é uma translação da parábola $y = x^2$ pelo vector $\vec{v} = (1, 0)$.

A recta e a parábola intersectam-se em dois pontos, cujas coordenadas são as soluções do sistema de equações precedente.



3. (a)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{4x^3 + 8x - 3}{2x} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{4x^3}{2x} + \frac{8x}{2x} - \frac{3}{2x} \right] = \frac{d}{dx} \left[2x^2 + 4 - \frac{3}{2}x^{-1} \right] = 4x + \frac{3}{2}x^{-2}$$

(b)

$$\frac{d}{dx} \left[x^2 \cdot (x^5 - e^{2x})^4 \right] = [x^2]' \cdot (x^5 - e^{2x})^4 + x^2 \cdot [(x^5 - e^{2x})^4]' =$$

$$2x \cdot (x^5 - e^{2x})^4 + x^2 \cdot 4(x^5 - e^{2x})^3 (5x^4 - 2e^{2x})$$

4. Sejam

$$f(u) = \frac{e^u}{1 - e^u} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

(a)

$$(f \circ g)(x) := f[g(x)] = f[\sqrt{x}] = \frac{e^{\sqrt{x}}}{1 - e^{\sqrt{x}}}$$

O domínio da função composta é: $D_{f \circ g} := \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$.
Neste caso, $D_g = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$ e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq 0\} = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$$

(b) Use a regra da cadeia, $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$, para calcular $(f \circ g)'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(u) &= \left(\frac{e^u}{1 - e^u} \right)' = \frac{(e^u)' \cdot (1 - e^u) - e^u \cdot (1 - e^u)'}{(1 - e^u)^2} = \\ &= \frac{e^u \cdot (1 - e^u) - e^u \cdot (-e^u)}{(1 - e^u)^2} = \frac{e^u - (e^u)^2 + (e^u)^2}{(1 - e^u)^2} = \frac{e^u}{(1 - e^u)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Pela regra da cadeia (regra da derivação da função composta):

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'[\sqrt{x}] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{(1 - e^{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5. Calcule cada integral e esboce o conjunto cuja área calculou:

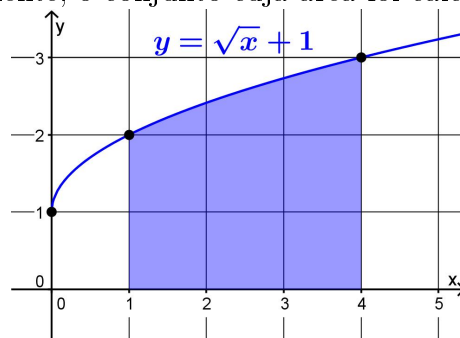
(a) Começemos por calcular a primitiva:

$$\int (\sqrt{x} + 1) dx = \int (x^{1/2} + 1) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + x + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + x + C$$

Usando o T.F.C. (regra de Barrow):

$$\begin{aligned} \int_1^4 (\sqrt{x} + 1) dx &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + x \right]_1^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} + 4 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + 1 \right) = \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 4 \right) - \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{16}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{14}{3} + 3 = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, o conjunto cuja área foi calculada é:



(b) A função que se pretende integrar é:

$$|x - 1| = \begin{cases} -(x - 1) & , \text{ se } x - 1 < 0 \\ x - 1 & , \text{ se } x - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 1 & , \text{ se } x < 1 \\ x - 1 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

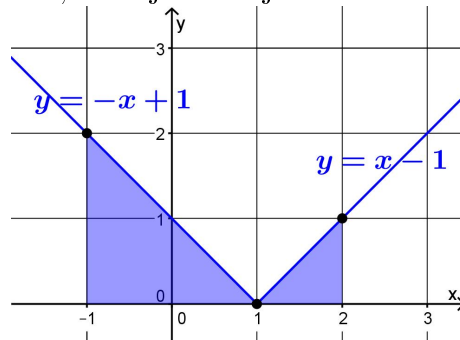
Decompondo o intervalo de integração $[-1, 2] = [-1, 1] \cup [1, 2]$, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x - 1| \, dx &= \int_{-1}^1 |x - 1| \, dx + \int_1^2 |x - 1| \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-x + 1) \, dx + \int_1^2 (x - 1) \, dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (-x + 1) \, dx &= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \left(-\frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) = 2 \\ \int_1^2 (x - 1) \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) = \\ &= (2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, o conjunto cuja área foi calculada é:



6. (a) Iremos utilizar o método de primitivação por substituição de variável:

$$y = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y + 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad dy = dx$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{x - 1} \, dx &= \int (y + 1) \cdot \sqrt{y} \, dy = \int (y + 1) \cdot y^{1/2} \, dy = \\ &= \int (y^{3/2} + y^{1/2}) \, dy = \frac{y^{5/2}}{5/2} + \frac{y^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}(x - 1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x - 1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

(b) Utilizaremos o método de primitivação por partes $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$.

Designemos $u = \ln(x)$, $v' = x^2$, logo $u' = \frac{1}{x}$ e $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{x^2}_{v'} dx &= \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{\frac{x^3}{3}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{3}}_v dx = \\ &= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C \end{aligned}$$

7. Sendo f contínua, as funções integrandas são contínuas e os integrais indefinidos de funções contínuas são diferenciáveis, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo (1).

Assim, todos os termos da equação são funções diferenciáveis, logo:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x f(t) dt \right)' &= (xe^{2x})' + \left(\int_0^x e^{-t} f(t) dt \right)' \\ f(x) &= (x)' \cdot e^{2x} + x \cdot (e^{2x})' + e^{-x} f(x) \\ f(x) - e^{-x} f(x) &= e^{2x} + 2xe^{2x} \\ f(x) &= \frac{(1 + 2x)e^{2x}}{1 - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Capítulo 10

Apêndice

10.1 Formulário de derivadas

$(k)'$	$= 0$	$(u \pm v)'$	$= u' \pm v'$
$(x^r)'$	$= r \cdot x^{r-1}$	$(ku)'$	$= k \cdot u'$
$(kx^r)'$	$= k \cdot r \cdot x^{r-1}$	$(u^r)'$	$= r \cdot u^{r-1} \cdot u'$
$(u \cdot v)'$	$= u' \cdot v + u \cdot v'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$(e^u)'$	$= u' \cdot e^u$	$(\ln u)'$	$= \frac{u'}{u}$

k e r são constantes e $u = f(x)$ e $v = g(x)$

10.2 Formulário de primitivas

$\int k \, dx = kx + C$ $\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$ $\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + C \quad (p \neq -1)$ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$ $\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$	$\int (u \pm v) \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx$ $\int (k \cdot u) \, dx = k \cdot \int u \, dx$ $\int [u]^p \cdot u' \, dx = \frac{1}{p+1} \cdot [u]^{p+1} + C \quad (p \neq -1)$ $\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln u + C$
---	--

k e r são constantes, e $u = f(x)$ e $v = g(x)$.