



Universidade Autónoma de Lisboa

Automação e Controlo 2018-2019

Professor Daniel de Matos Silvestre

1 Introdução ao Controlo

A teoria de controlo de sistemas dinâmicos aparece em áreas tão distintas como electrónica, mecânica, química, biologia, economia, etc. De forma pouco formal, um sistema dinâmico é um processo que evolui ao longo de tempo de acordo com variáveis internas, estímulos externos e exhibe um comportamento nas suas saídas. A principal diferença entre um sistema dinâmico e um estático é que o primeiro depende das entradas passadas (tem memória) enquanto o último depende apenas das entradas actuais. Um desenho esquemático é apresentado na Figura 1 com referência às notações tipicamente adoptadas.

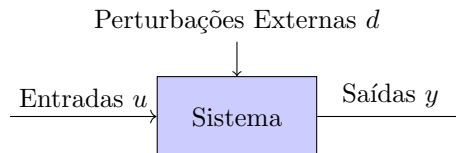


Figure 1: Representação esquemática de um sistema dinâmico.

Um sistema de controlo visa produzir um estímulo externo ao sistema dinâmico de forma a obter como saída uma resposta desejada denominada como referência. Para tal, introduzimos a noção de *feedback* em que as saídas são usadas para calcular o erro entre a trajectória actual e a desejada. Num sistema moderno de controlo teremos um esquema mais próximo do apresentado na Figura 2.

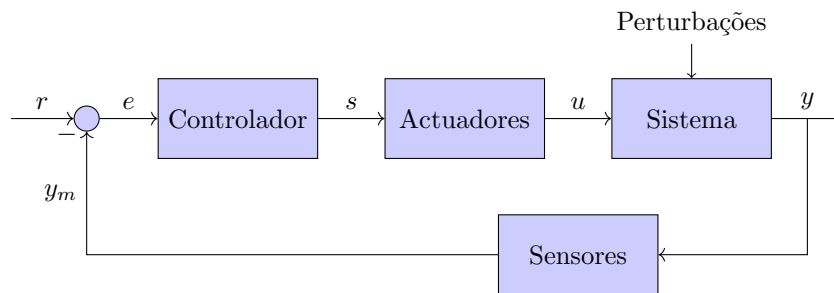


Figure 2: Representação esquemática de um sistema de controlo.

Os objectivos para o controlador serão:

- Modificar o comportamento do sistema dinâmico (processo);
- Fazer com que a saída siga uma certa referência;
- Ser estável;
- Ter boa rejeição às perturbações;
- Responder rapidamente a alteração dos valores de referência.

Em termos de nomenclatura, se o controlador definir a lei de actuação com base num bom conhecimento do processo a controlar (ou seja fosse um sistema a adicionar à esquerda na Figura 1) então diz-se que o sistema está em **malha aberta**. Se por contrário usarmos feedback como na Figura 2 temos um controlador em **malha fechada**.

De forma a perceber intuitivamente o que isso representa pensemos no exemplo de abrir a água de uma torneira a uma temperatura desejada. Se, com base num bom conhecimento do funcionamento da torneira, for escolhida uma posição pré-determinada o sistema está em malha aberta pois nenhuma informação está a ser medida para corrigir o controlo. Se existirem perturbações ao funcionamento normal ou mau modelo do sistema, a temperatura da água será incorrecta. Se por outro lado usarmos um termómetro para alterar a posição da torneira então temos um sistema em malha fechada.

Existem muitos exemplos de processos a controlar dentro de sistemas mecânicos:

- Variáveis a controlar
 1. Posição (linear, angular);
 2. Velocidade (linear, angular);
 3. Força;

4. Binário;
- Aplicações
 1. Elevadores;
 2. Automóveis;
 3. Aviões;
 4. Quadrotores e outros drones;
 5. Robots móveis terrestres;
 6. Automação em linhas de montagem;
 7. Antenas;
 8. Leitores de CD;
 9. Discos de armazenamento;
 10. Máquinas fotográficas.

2 Modelação

Na Secção 1 identificámos que um sistema de controlo tipicamente consiste de 3 componentes: sensores, computação e actuação. Nesta secção pretendemos perceber como se descreve formalmente o sistema dinâmico.

Um modelo é uma representação matemática de um sistema físico, biológico, de informação ou outro. O interesse do modelo é que representa uma previsão do comportamento do sistema real. Um projecto de desenho de um controlador inicia-se sempre através da modelação do sistema dinâmico a considerar. Na definição do modelo existe um trade-off típico entre simplicidade e correcção. Modelos muito complexos tendem a ser mais fidedignos para a previsão do modelo e são usados como simuladores antes da aplicação real enquanto que para desenhar controladores utilizam-se modelos mais simples fruto de hipóteses e pressupostos que nem sempre são válidos mas fornecem uma boa aproximação do real.

Os tipos de modelos que poderíamos considerar podem ser agrupados da seguinte forma:

- Entrada-Saída - relacionam as saídas com as entradas:
 - Equação diferencial - pode ser linear ou não-linear e variante ou invariante no tempo;
 - Função de transferência - Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLITs).

- Estado - relaciona a saída com a entrada e variáveis internas do sistema.

Tomemos como exemplo o Cruise Control dos carros que tem como objectivo a manutenção de uma velocidade constante de forma automática. Para este modelo as variáveis de entrada será apenas a força $u(t)$ gerada no contacto entre os pneus e o pavimento, enquanto a saída será a velocidade $v(t)$ do veículo em si. Um diagrama é apresentado na Figura 3.

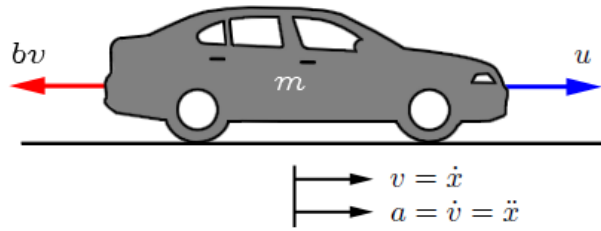


Figure 3: Esquemático do exemplo do cruise control.

As forças de resistência devido ao atrito com o pavimento e do vento estão a ser assumidas variar linearmente com a velocidade. Considerar outros efeitos tornaria o modelo mais complexo e realista à custa de um processo de síntese para o controlador muito mais complexo.

Se somarmos todas as forças e utilizarmos a segunda Lei de Newton ($f = ma$, força é igual a massa vezes aceleração) temos que:

$$m\dot{v} + bv = u$$

enquanto que o nosso output será apenas $y = v$. De notar que estamos a utilizar a notação omitindo a dependência do tempo t e $\dot{v} = \frac{\partial v(t)}{\partial t}$. Os parâmetros do modelo são a massa m em unidades kg e o coeficiente de amortecimento em unidades N.s/m. Temos então como modelo uma equação diferencial de 1^a ordem para o automóvel que se move no plano.

Outra questão interessante seria se a variável de interesse não fosse a velocidade mas sim a posição. Sabendo que $\dot{x} = v$ temos:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = u.$$

e teríamos uma equação diferencial de 2^a ordem com a saída a ser x .

Outros sistemas físicos, mecânicos, eléctricos, etc. têm uma síntese do seu modelo semelhante mas recorrendo às leis da física que governam esses exemplos.

3 Linearização

Na Secção 2 vimos que tipo de modelos existem e o processo típico para os obter. Convenientemente foi escolhido um exemplo que resulta num SLIT (tipo de sistemas que estamos interessados), mas nem sempre é esse o caso. Genericamente, iremos obter uma equação diferencial genérica para a dinâmica do tipo:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e outra para a saída:

$$y = h(x, u).$$

Para pontos de equilíbrio, ou seja, pontos para os quais o sistema sem estímulos permanece no mesmo estado, é possível fazer uma linearização em torno desse ponto e obter um modelo que se comporta de forma semelhante ao sistema real para valores do estado *próximos* do equilíbrio. A proximidade aqui irá depender do sistema não-linear inicial.

Dada a intuição anterior, pontos de equilíbrio têm de satisfazer $\dot{x} = 0$ de forma a que o estado permaneça constante. Dessa forma temos que calcular esses pontos (x_0, u_0) tais que:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0, u_0) \\ y_0 &= h(x_0, u_0). \end{aligned}$$

Uma forma de aproximar uma função não-linear através de uma linear é recorrendo à expansão de Taylor de 1ª Ordem. Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} (u - u_0) \\ y - y_0 &\approx \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} (u - u_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Recorrendo a reescrever as equações usando as novas variáveis $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{u} = u - u_0$ e $\tilde{y} = y - y_0$ obtemos equações diferenciais que correspondem a um SLIT.

Vamos usar o exemplo de um pêndulo com massa m , tamanho do braço L e com torque aplicado T_c e ângulo θ medido a partir da posição vertical que tem modelo para dinâmico expresso através da equação diferencial não-linear:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = \frac{1}{mL^2} T_c \tag{2}$$

De forma a facilitar a compreensão vamos dizer que as nossas variáveis são $x = \theta$, $z = \dot{\theta}$ e $u = T_c$, ficando com as equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, z, u) \\ \dot{z} &= f_2(x, z, u)\end{aligned}$$

com $f_1(x, z, u) = z$ e $f_2(x, z, u) = -\frac{g}{L} \sin x + \frac{1}{mL^2}u$.

O pêndulo está numa posição estável quando $\theta = 0$ e $T_c = 0$. Dessa forma podemos escrever a versão linearizada de (2) usando (1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &\approx \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x_0, z_0, u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial z} \right|_{x_0, z_0, u_0} (z - z_0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0, z_0, u_0} (u - u_0) \\ \dot{z} &\approx \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x_0, z_0, u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial z} \right|_{x_0, z_0, u_0} (z - z_0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_0, z_0, u_0} (u - u_0)\end{aligned}$$

que resolvendo as derivadas ficamos com:

$$\begin{aligned}\dot{x} &\approx 0 \Big|_{x_0, z_0, u_0} (x - x_0) + 1 \Big|_{x_0, z_0, u_0} (z - z_0) + 0 \Big|_{x_0, z_0, u_0} (u - u_0) \\ \dot{z} &\approx -\frac{g}{L} \cos x \Big|_{x_0, z_0, u_0} (x - x_0) + 0 \Big|_{x_0, z_0, u_0} (z - z_0) + \frac{1}{mL^2} \Big|_{x_0, z_0, u_0} (u - u_0)\end{aligned}$$

e substituindo $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ e $u_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &\approx z \\ \dot{z} &\approx -\frac{g}{L}x + \frac{1}{mL^2}u.\end{aligned}$$

A primeira equação diz apenas que $\dot{x} = z$ que é trivial. A segunda podemos reverter para as variáveis originais e perceber que a equação linearizada do pêndulo é:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = \frac{1}{mL^2}T_c.$$

4 Transformada de Laplace

Na Secção 3 chegámos à conclusão que conseguimos aproximar qualquer sistema não-linear invariante no tempo (embora esta aproximação possa ser de fraca qualidade dependendo das equações originais) por um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT), que é o objecto de estudo da disciplina inicial de Automação e Controlo. O próximo passo na análise dos sistemas será partir da equação diferencial linear e obter a resposta temporal do sistema, percebendo

assim o comportamento de cada variável quando respeita a equação diferencial.

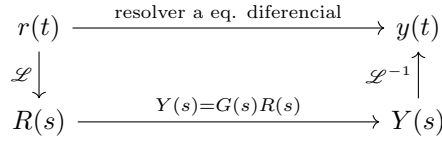


Figure 4: Esquema para a análise da resposta de um sistema.

A abordagem típica inicial seria resolver directamente a equação diferencial e obter a função que descreve o comportamento do estado. Outra alternativa será descrever a função de transferência como o quociente entre as transformadas de Laplace do sinal de saída e o de entrada. A Figura 4 representa as alternativas. A opção desejada será então analisar o sistema no domínio de s em vez de t .

Falta então introduzir a definição da transformada de Laplace $\mathcal{L}$ que tem a propriedade interessante de que convoluções no domínio do tempo são convertidas em produtos. Apresentamos de seguida a definição e algumas das propriedades na Tabela 2 desta transformada que serão utilizadas:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\sigma) \exp^{-s\sigma} d\sigma.$$

A transformada de Laplace permite desta forma converter qualquer sinal no domínio do tempo para o domínio da variável complexa s . O cálculo do integral envolvido na transformada pode não ser fácil de resolver. De seguida estaremos interessados em analisar a transformada de Laplace de dois sinais, o escalão unitário $\epsilon(t)$ (optámos por esta notação embora em muitos livros aparece como $u(t)$ para evitar confusão com a entrada do sistema) e o impulso unitário tipicamente representado como $\delta(t)$.

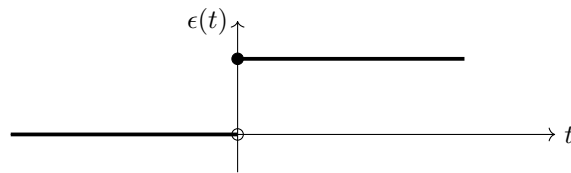


Figure 5: Representação de um escalão unitário $\epsilon(t)$.

O escalão unitário está representado na Figura 5 e corresponde a um sinal que fica constante igual à unidade a partir de que o seu argumento seja zero.

Por outro lado, o impulso unitário corresponde a um sinal com integral igual à unidade e que está concentrado na origem. Uma representação aparece na Figura 6.

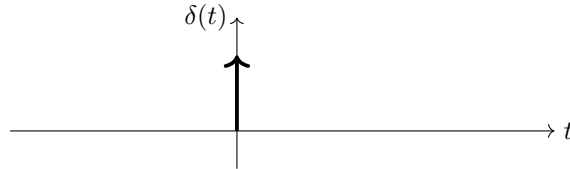


Figure 6: Representação de um impulso unitário $\delta(t)$.

Começemos por calcular a transformada de Laplace do escalão unitário que, na prática devido a este operador ser linear, servirá para construir a transformada de qualquer sinal construído por patamares.

$$E(s) = \int_0^{\infty} \epsilon(\sigma) \exp^{-s\sigma} d\sigma = \int_0^{\infty} \exp^{-s\sigma} d\sigma = \frac{\exp^{-s\sigma}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Da mesma forma podemos analisar a transformada do sinal rectangular à medida que a sua duração (h) tende para zero para avaliar $\mathcal{L}(\delta(t))$:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \delta(\sigma) \exp^{-s\sigma} d\sigma = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \frac{1}{h} \exp^{-s\sigma} d\sigma \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\exp^{-s\sigma}}{-s} \Big|_0^h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp^{-hs} - 1}{-hs} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-s \exp^{-hs}}{-s} = 1 \end{aligned}$$

Não iremos demonstrar, mas seguindo a definição poderíamos chegar a todas as transformadas de sinais que se apresentam na Tabela 1.

Sinal	$\mathcal{L}$
$\delta(t)$	1
$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$t\epsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\epsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$te^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$(1 - e^{-at})\epsilon(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sin(at)\epsilon(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)\epsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at + \phi)\epsilon(t)$	$\frac{(\sin \phi)s + (\cos \phi)a}{s^2+a^2}$
$\cos(at + \phi)\epsilon(t)$	$\frac{(\cos \phi)s - (\sin \phi)a}{s^2+a^2}$
$\sin(bt)e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$\cos(bt)e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$\sinh(bt)e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2-b^2}$
$\cosh(bt)e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-b^2}$

Table 1: Transformada de Laplace $\mathcal{L}$ de sinais comuns.

Nome	Propriedade
Linearidade	$\mathcal{L}(ax(t) + bu(t)) = aX(s) + bU(s)$
Primeira derivada	$\mathcal{L}(\frac{\partial x(t)}{\partial t}) = sX(s) - x(0^-)$
n derivada	$\mathcal{L}(\frac{\partial^n x(t)}{\partial t^n}) = s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{\partial^{i-1} x}{\partial t^{i-1}}(0^-)$
Integração	$\mathcal{L}(\int_0^t x(\tau) d\tau) = \frac{1}{s} X(s)$
Deslocação no tempo	$\mathcal{L}(x(t-a)\text{step}(t-a)) = \exp^{-as} X(s)$
Deslocação complexa	$\mathcal{L}(x(t) \exp^{-at}) = X(s+a)$
Escalamento no tempo	$\mathcal{L}(x(\frac{t}{a})) = aX(as)$
Convolução	$\mathcal{L}(x(t) * u(t)) = X(s)U(s)$
Teorema do Valor Inicial	$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
Teorema do valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Table 2: Propriedades da transformada de Laplace $\mathcal{L}$.

5 Função de Transferência

Nesta secção procuramos uma descrição genérica do funcionamento de um SLIT em vez de resolvermos a equação diferencial para umas determinadas condições iniciais e um $u(t)$ específico. Começemos por utilizar os sinais que descrevemos na secção anterior para representar qualquer sinal de entrada $u(t)$. Se descretizarmos o tempo como $t_i = t_{i-1} + h$ em que o h é o intervalo até ao próximo instante de tempo a considerar da sequência $\dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots$, temos que:

$$u(t) \approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t_i) \delta_h(t - t_i) h$$

onde o $\delta_h(t - t_i)$ representa a aproximação do impulso unitário por um sinal rectangular de base h . À medida que $h \rightarrow 0$ ficamos com

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\sigma) \delta(t - \sigma) d\sigma$$

Sendo o modelo do sistema uma equação diferencial linear permite estudar o comportamento do sistema para cada um dos escalões

unitários e a resposta final será a soma de todas essas contribuições. O facto de o sistema ser invariante no tempo significa que podemos avaliar para um escalão e deslocar o sinal de saída. Em conclusão, o conhecimento da resposta do sistema $g(t - \sigma)$ a cada escalão $\delta(t - \sigma)$ permite escrever a saída como:

$$x(t) = \int_{i=-\infty}^{+\infty} u(\sigma)g(t - \sigma)d\sigma$$

que é a definição da convolução $x(t) = u(t) * g(t)$. Recorrendo à transformada de Laplace introduzida na Secção 4 e às propriedades na Tabela 2 temos que:

$$X(s) = G(s)U(s) \iff G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

A função $G(s)$ será apelidade de função de transferência dado que pode ser interpretada como o efeito que o sistema exerce sobre impulsos unitários estando no domínio s .

Um ponto importante de notar é que a função de transferência de um SLIT, dado ser obtida através da transformada de Laplace de ambos os membros de uma equação diferencial linear, irá ter o formato:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são ambos polinómios. No âmbito dos sistemas estudados iremos considerar apenas $G(s)$ própria, quando o grau de $N(s)$ é menor ou igual do que o grau de $D(s)$, e o caso de estritamente própria quando a desigualdade acontece em sentido estrito.

6 Polos, zeros e Teoremas do Valor Inicial e Final

A função de transferência identificada na Secção 5 caracteriza por completo o modelo de um SLIT na medida em que é obtida através da relação de um para um através da transformada de Laplace. Dado que a equação diferencial do modelo é linear e invariante no tempo temos que:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e nesse contexto podemos começar por definir os pólos e zeros do sistema. Todas as raízes do polinómio $N(s)$ chamaremos zeros na

medida em que são os valores de s que anulam a função de transferência. Por outro lado, as raízes do polinómio $D(s)$ serão chamadas de pólos do sistema. Isto quer dizer que factorizando os polinómios pelas suas raízes podemos obter as seguintes formas canónicas para a função de transferência:

$$G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

ou

$$G(s) = K_0 \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_m)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \cdots (1 + s\tau_n)}$$

para o conjunto de zeros $\{-z_1, -z_2, \dots, -z_m\}$ e o conjunto de pólos $\{-p_1, -p_2, \dots, -p_n\}$, ambos em rad/s . No segundo formato, temos explicitamente o ganho estático K_0 , que representa o valor no regime estacionário da resposta do sistema ao escalão unitário, e as constantes de tempo T_i e τ_i ambas em segundos.

Aparentemente, calcular o regime estacionário para obter K_0 poderia requerer converter $G(s)$ para o tempo, bem como o sinal u e calcular a resposta no tempo para saber o seu limite quando o tempo tende para infinito. O resto desta secção visa tornar esse processo mais fácil introduzindo dois teoremas importantes.

Comecemos por analisar o nosso objectivo de forma a descobrir os passos que levam à construção dos teoremas. De alguma forma, gostaríamos de relacionar condições no tempo com a variável s no domínio da frequência. Se consultarmos a Tabela 2 notamos que temos uma das regras que faz essa relação:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right) = sX(s) - x(0^-).$$

Dado que a variável s está em rad/s é de esperar que calcular o limite de t para infinito seja equivalente a $s \rightarrow 0$. Para simplificar as expressões, vamos usar $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = x(0)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty)$. Sendo assim, calculemos:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right) &= \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0)] \\ \iff \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\partial x(t)}{\partial t} e^{-st} dt &= \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0)] \\ \iff \int_0^\infty \frac{\partial x(t)}{\partial t} dt &= \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0)] \\ \iff x(\infty) - x(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0)] \\ \iff x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \end{aligned}$$

e de forma semelhante temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right) &= \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0)] \\
\iff \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial x(t)}{\partial t} e^{-st} dt &= \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0)] \\
\iff 0 &= \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0)] \\
\iff x(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s).
\end{aligned}$$

Podemos assim concluir o Teorema do Valor Final que nos diz $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ e o Teorema do Valor inicial que traduz $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t)$.

7 Diagrama de blocos

Os sistemas a controlar e as suas interligações com os controladores são representados através de diagramas de blocos. Embora já tenhamos introduzido de forma intuitiva a sua utilização, vale a pena perceber que tipo de operações podemos executar nos sistemas que possam conduzir a modelos mais simples ou escritos num formato mais interessante para a tarefa de desenhar o controlador.

Naturalmente, sistemas complexos são estudados como a interligação entre vários sub-sistemas mais simples. Cada um destes tem a sua respectiva representação através de uma função de transferência e ao conjunto dos blocos e das suas ligações chama-se um diagrama de blocos. A sua simplificação pode ser feita de forma algébrica, i.e., escrevendo as equações para cada bloco através da definição de função de transferência e outras para as suas ligações e resolver o sistema de equações. Alternativamente, podemos recorrer a operações gráficas que alteram o formato dos diagramas até obter especificações de acordo com o pretendido.

7.1 Elementos básicos

Um diagrama de blocos pode ser mais ou menos complexo mas pode ser dividido essencialmente em vários elementos básicos que o constituem. Na Figura 7 apresentamos os vários elementos:

- blocos - elementos que representam uma certa operação.
- pontos de soma - também chamados de comparadores consoante os sinais de entrada e a sua saída é a soma ou subtracção dos inputs.

- pontos de derivação - permitem que um sinal seja dividido de forma a ser utilizado em duas componentes do diagrama.

Embora pareça demasiado simplista, dado que os blocos podem representar qualquer operação, conseguimos descrever até sistemas não-lineares através de diagrama de blocos. De seguida vamos ver algumas operações e formas de diagramas básicas que permitem a manipulação e simplificação dos diagramas.

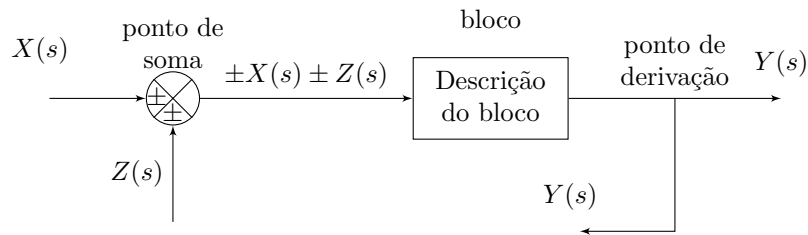


Figure 7: Elementos básicos de um diagrama de blocos.

7.2 Blocos em cascata

Um diagrama onde aparecem blocos em cascata (ou em série) são os que cada entrada de um bloco é a saída de o anterior, com a exceção clara do inicial que é apenas a entrada de todo o diagrama. Uma ilustração encontra-se na Figura 8.

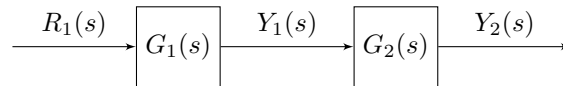


Figure 8: Blocos em cascata.

Neste caso, o valor de saída do primeiro sistema, $Y_1(s)$, corresponde à entrada $R_2(s)$ do segundo bloco. Uma representação equivalente para um diagrama de blocos em cascata encontra-se na Figura 9.

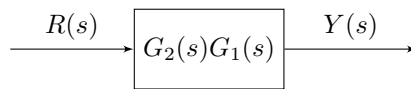


Figure 9: Sistema equivalente para os blocos em cascata.

7.3 Blocos em paralelo

A existência de vários blocos que recebem o mesmo input e cujo o output é independente caracteriza-se por ser um diagrama com

blocos em paralelo. A representação encontra-se na Figura 10.

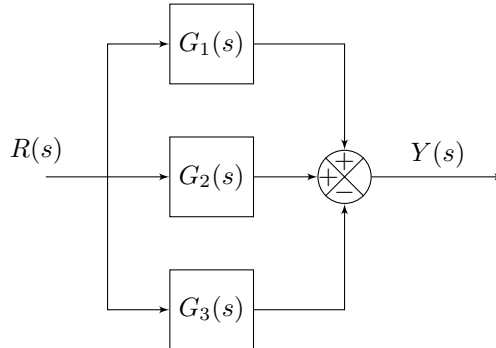


Figure 10: Blocos em paralelo.

Quando temos blocos em paralelo estes podem alimentar secções diferentes do diagrama de blocos. Neste caso entram num somador pelo que o sistema equivalente é dado na Figura 11.

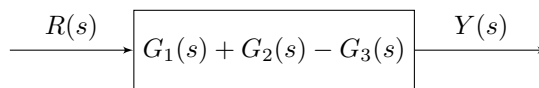


Figure 11: Sistema equivalente para os blocos em paralelo.

7.4 Retro-alimentação

Na introdução ao controlo foi introduzido que uma das principais formas de controlo é denominada por retro-alimentação que permite o controlador ajustar o sinal de input ao sistema conforme o erro para a referência.

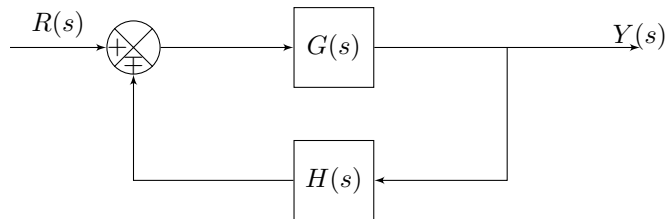


Figure 12: Diagrama de blocos para retro-alimentação.

A retro-alimentação chama-se positiva ou negativa consoante o sinal no somador que dá entrada ao que vem do bloco com função de transferência $H(s)$. O diagrama equivalente é apresentado na Figura 13. De realçar que o sinal que aparece na função de transferência do diagrama simplificado é o contrário ao da retro-alimentação.

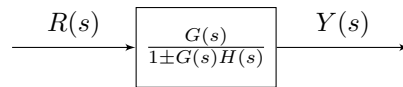


Figure 13: Sistema equivalente para os blocos em paralelo.

7.5 Operações sobre diagramas de blocos

Existem várias alterações possíveis aos diagramas de blocos seja com o objectivo de os simplificar ou de os colocar num formato mais interessante para desenhar o controlador. De seguida vemos as operações que nos permitem realizar esses objectivos.

7.5.1 Mover um bloco para trás de um ponto de derivação

Nesta situação, apresentamos na Figura 14 onde o objectivo seria mover o sistema dado por $G(s)$ para antes do ponto de derivação.

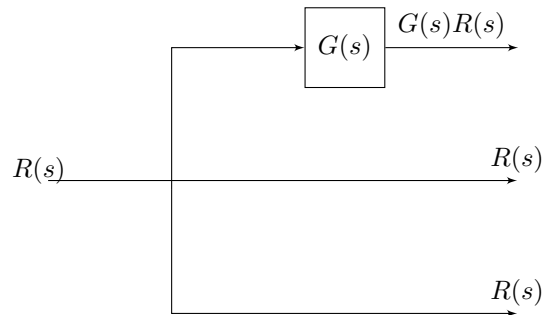


Figure 14: Diagrama antes de mover um bloco para trás do ponto de derivação.

Se o fizermos, precisamos de equilibrar os restantes ramos de forma a que as saídas permaneçam iguais. Desta forma temos o diagrama equivalente na Figura 15.

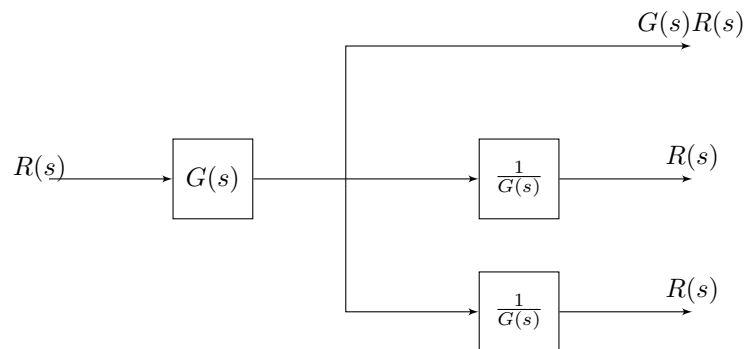


Figure 15: Diagrama depois de mover um bloco para trás de um ponto de derivação.

7.5.2 Mover um bloco para a frente de um ponto de derivação

Executar o deslocamento de um bloco para a frente de um ponto de derivação apresentado na Figura 16 corresponde a adicionar esse mesmo bloco em cada ramo.

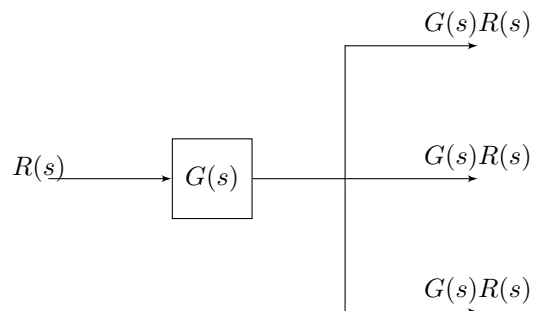


Figure 16: Diagrama antes de mover um bloco para trás do ponto de derivação.

Se o fizermos, precisamos de equilibrar os restantes ramos de forma a que as saídas permaneçam iguais. Desta forma temos o diagrama equivalente na Figura 17.

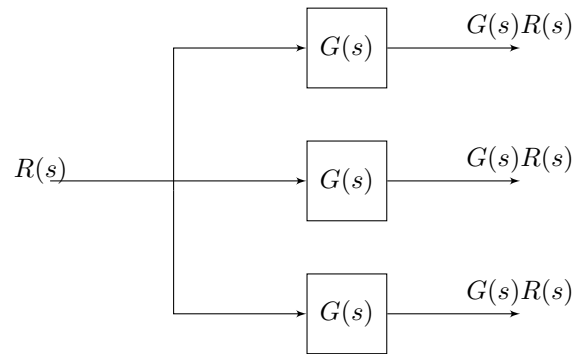


Figure 17: Diagrama depois de mover um bloco para trás de um ponto de derivação.

7.5.3 Mover um bloco para trás de um ponto de soma

Nesta situação, apresentamos na Figura 18 onde o objectivo seria mover o sistema dado por $G(s)$ para antes do ponto de soma.

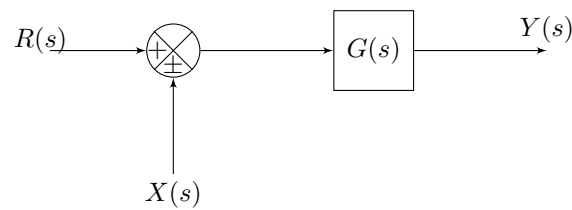


Figure 18: Diagrama antes de mover um bloco para trás do ponto de soma.

Se o fizermos, precisamos de duplicar o bloco para todos os ramos de forma a que as saídas permaneçam iguais. Desta forma temos o diagrama equivalente na Figura 19.

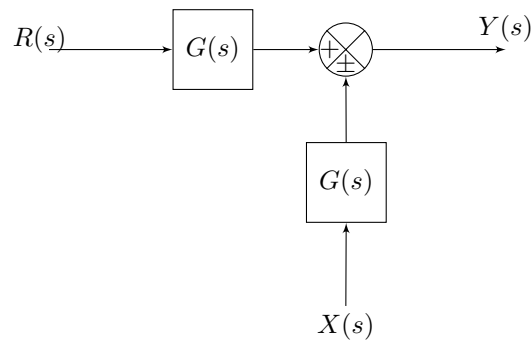


Figure 19: Diagrama depois de mover um bloco para trás de um ponto de soma.

7.5.4 Mover um bloco para a frente de um ponto de soma

Executar o deslocamento de um bloco para a frente de um ponto de soma apresentado na Figura 20 corresponde a adicionar esse mesmo bloco ao ramo de saída e compensar com o inverso em todos os ramos de entrada.

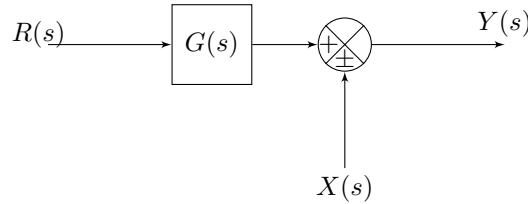


Figure 20: Diagrama antes de mover um bloco para trás do ponto de soma.

Desta forma temos o diagrama equivalente na Figura 21.

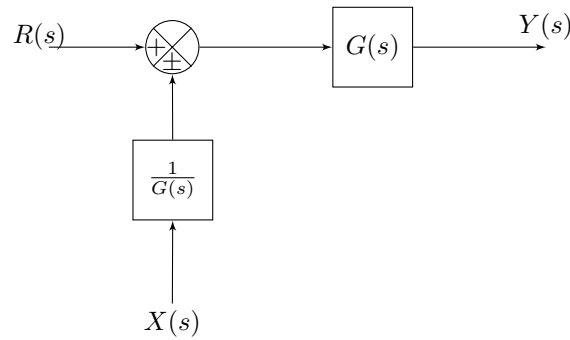


Figure 21: Diagrama depois de mover um bloco para trás de um ponto de soma.

8 Resposta geral de um sistema de 1ª Ordem

O primeiro passo para introduzir a forma de desenhar controladores para SLITs é estudar sistemas de 1ª e 2ª Ordem de forma a perceber o seu comportamento. Perceber a relação entre os parâmetros da função de transferência e o comportamento no tempo permitirá ajustar as variáveis que aparecerão aquando da retro-alimentação com o controlador.

Anteriormente já tínhamos identificado que uma função de transferência pode ser escrita no formato:

$$G(s) = K_0 \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_m)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \cdots (1 + s\tau_n)}$$

que no caso de um sistema de 1ª Ordem se torna:

$$G(s) = K_0 \frac{a}{s + a}$$

para o ganho estático K_0 e pólo a . Enquanto que o pólo está em rad/seg , a constante de tempo $\tau = \frac{1}{a}$ está em seg . Desta forma podemos especificar condições para o valor final do sistema em resposta a um escalão mas também a velocidade a que o sistema converge.

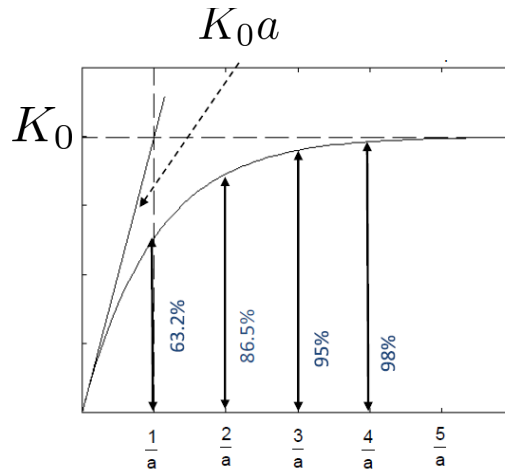


Figure 22: Resposta genérica de um sistema de 1ª Ordem e a sua velocidade de convergência.

Na Figura 22 temos a representação da relação entre a constante de tempo $\tau = 1/a$ e o valor da saída do sistema. De notar que os valores no gráfico são calculados por substituição directa na função que dá a resposta no tempo. A título de exemplo vamos calcular $x(4\tau)$:

$$x(4\tau) = K_0(1 - e^{-4a\tau}) = K_0(1 - e^{-4\cancel{a}\frac{1}{\cancel{a}}}) = K_0(1 - e^{-4})$$

Desta forma a percentagem de subida para um sistema de primeira ordem ao fim de 4τ é dada por $1 - e^{-4} \approx 98\%$.

Desta forma podemos perceber que função de transferência cumpre requisitos como tempo de estabelecimento para a saída estar a 2% do valor final tem de ser no máximo 5 segundos ($T_{2\%} \leq 5seg$) e um ganho estático de 10. Do primeiro retirávamos que $\frac{4}{a} \leq 5 \iff a \geq \frac{4}{5}$ e $K_0 = 10$ da segunda condição resultando numa função de transferência:

$$G(s) = \frac{8}{s + 0.8}$$

9 Resposta geral de um sistema de 2ª Ordem

Um sistema de 2ª Ordem é caracterizado por ter dois pólos. Como vimos para o caso de 1ª Ordem na Secção 8, o ganho estático que equivale ao limite da função de transferência quando o s tende para zero apenas actua como uma constante de amplificação. Por esse motivo vamos simplificar e estudar um sistema geral de 2ª Ordem de ganho estático unitário.

De forma a mais tarde termos variáveis de interesse físico vamos escrever a função de transferência como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

e calcular os respectivos pólos através da fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)}}{2} \\ &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned}$$

Desta forma podemos identificar 3 situações possíveis:

$0 \leq \zeta < 1$ – Sistema subamortecido com pólos complexos conjugados em $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$;

$\zeta = 1$ – Sistema criticamente amortecido com 2 pólos reais em $s = -\zeta\omega_n$;

$\zeta > 1$ – Sistema sobreamortecido com pólos reais em $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$.

9.1 Sistema subamortecido $0 \leq \zeta < 1$

Num sistema subamortecido é possível identificar 3 variáveis fundamentais:

1. ζ como o coeficiente de amortecimento;
2. ω_n como a frequência de oscilações naturais não amortecidas;

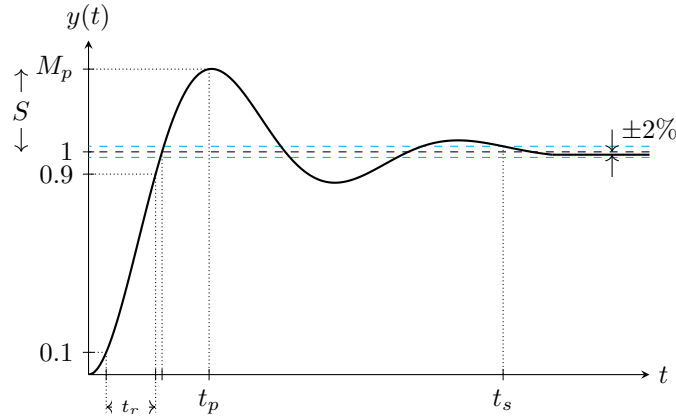


Figure 23: Resposta de um sistema subamortecido ao escalão unitário.

3. $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ como a frequência de oscilações amortecidas.

Usando a transformada de Laplace do escalão unitário, podemos calcular a resposta no tempo de um sistema subamortecido:

$$y(t) = \overset{\text{ganho unitário}}{1} - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{\overset{\text{parte real dos pólos}}{-\zeta\omega_n} t} \sin \left(\overset{\text{parte imaginária dos pólos}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} t + \Psi \right), t > 0 \quad (3)$$

com:

$$\Psi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

A resposta em (3) está representada na Figura 23.

As especificações para o desempenho do sistema controlado são descritas através de:

Tempo de pico (t_p) é o tempo que o sistema demora a atingir o valor máximo da saída;

Tempo de estabelecimento (t_s) tempo até o regime transitório desaparecer e ficarmos com o estacionário, vulgarmente uma faixa de $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$ do valor final;

Sobreelevação (S %) percentagem de subida entre o valor de pico e o valor final;

Tempo de subida (t_r) tempo que o sistema demora a atingir a vizinhança do valor final, tipicamente o intervalo entre 10% e 90%.

Para sistemas subamortecidos, é possível especificar todas estas à custa de ζ e ω_n . Começemos por encontrar os pontos em que $y(t)$ tem derivada nula (os mínimos e máximos relativos). Estes acontecem quando o seno na expressão (3) é zero pelo que:

$$t = \frac{n\pi}{\omega_d} = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Temos então que o período de oscilações é $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ e que o pico acontece no primeiro máximo relativo (que é também máximo absoluto), o que faz o tempo de pico ser:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T_d}{2}$$

O tempo de estabelecimento t_s pode ser calculado considerando o seno ao seu valor máximo. Desta forma:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} = 0.02$$

se quisermos calcular para 2%. A solução para a equação é dada por:

$$T_s = -\frac{\ln(0.02 \times \sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta \omega_n}$$

Isto significa que temos os seguintes valores aproximados:

- $t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$ para 5%;
- $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$ para 2%;
- $t_s = \frac{4.6}{\zeta \omega_n}$ para 1%.

que são a expressão análoga para o sistema de 1ª Ordem porque descartamos a parte imaginária dos pólos ao tomar o seno como o seu máximo.

A sobreelevação tem como definição:

$$S = 100 \frac{y_{\max} - y_{\text{final}}}{y_{\text{final}}} = 100 \cdot e^{\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

Não existe uma expressão simples para o tempo de subida no entanto pode ser aproximado por $t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$.

9.2 Sistema criticamente amortecido $\zeta = 1$

Os sistemas subamortecidos eram caracterizados pelo seu carácter oscilatório causado pela componente imaginária dos pólos. Quando $\zeta = 1$, essa componente é zero e temos dois pólos reais iguais. Calculando a resposta ao escalão temos:

$$y(t) = [1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}] \epsilon(t)$$

onde aparece novamente ω_n como factor de escala para o eixo do tempo. Um ponto essencial é que não havendo oscilações deixamos de ter sobrelevação S e pico.

Recorrendo a expressões aproximadas temos:

- Tempo de subida – t_r de 10% a 90% é aproximado por $\frac{4.4}{\omega_n}$;
- Tempo de estabelecimento – t_s a 5% dado por $\frac{4.8}{\omega_n}$, t_s a 2% dado por $\frac{5.8}{\omega_n}$.

De forma semelhante aos sistemas de 1ª Ordem, a velocidade de convergência depende apenas do pólo mais próximo do eixo imaginário. Sabendo que os pólos de um sistema com $\zeta > 1$ continuaram reais mas teremos um mais próximo do eixo imaginário temos que o sistema que converge mais rapidamente para o comportamento estacionário é o criticamente amortecido, para uma mesma frequência natural ω_n .

9.3 Sistema sobreamortecido $\zeta > 1$

O último caso de interesse a estudar é a classe de sistemas sobreamortecidos, que após a discussão anterior, têm dois pólos reais distintos em $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ que vamos especificar usando p_1 e p_2 .

Se definirmos uma constante M :

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

temos a resposta ao escalão:

$$y(t) = \left(1 + \frac{M}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{M}{p_2} e^{p_2 t}\right) \epsilon(t)$$

De forma semelhante ao caso criticamente amortecido, à medida que o pólo p_1 tende para zero, o sistema fica mais lento. Quando o valor $\zeta \gg 1$ podemos utilizar a aproximação:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx -\frac{\omega_n}{2\zeta} \\ p_2 &\approx -2\zeta\omega_n \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos identificar o tempo de subida e estabelecimento dado que não existem oscilações:

- Tempo de subida – t_r de 10% a 90% é aproximado por 2.2τ ;
- Tempo de estabelecimento – t_s a 2% dado por 4τ .

embora o tempo de estabelecimento para sistemas cujo $\zeta \gg 1$ possa ser dado pela expressão:

$$T_s \approx \frac{\ln(0.02)}{p_1} = \frac{-\ln(0.02)}{\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)}$$

Para visualização podemos recorrer por exemplo a:
<https://lpsa.swarthmore.edu/SecondOrder/SOI.html>

10 Aproximação de sistemas de ordem superior

Nas respostas dos sistemas de 1^a e 2^a Ordem concluímos que a resposta de um sistema ao escalão unitário tem componentes que dependem da localização dos seus pólos:

- pólo real simples adiciona uma resposta do tipo e^{-at} ;
- pólos reais duplo adicionam duas componentes do tipo e^{-at} , te^{-at} ;
- pólos complexos conjugados acrescentam à resposta $e^{-at} \sin(bt + \Psi)$.

Cada uma das componentes é adicionada à constante final para compôr a resposta completa do sistema. Interessa ainda relembrar que a parte real dos pólos determina o decaimento da respectiva contribuição e a constante que a multiplica (chamada de resíduo) depende da localização dos restantes pólos e zeros. Interessa definir em que situações podemos utilizar o decaimento rápido da contribuição do respectivo pólo ou o pequeno resíduo para simplificar a função de transferência, convertendo-a numa fracção envolvendo polinómios de menor grau.

A primeira noção importante relaciona os pólos de acordo com a velocidade a que as correspondentes resposta desaparecem da resposta total do sistema. Temos então que os pólos que geram contribuições lentas, isto é cuja componente real é pequena em magnitude, são denominados de pólos dominantes. De forma empírica definimos as seguintes regras para eliminar um pólo não dominante da função de transferência:

- Quando ao fim de 5τ a sua contribuição para o regime transitório é desprezável em comparação aos restantes;
- Quando o módulo da parte real do pólo é pelo menos 5 vezes maior que o módulo da parte real do pólo dominante.

Desta forma podemos simplificar a função de transferência mantendo o mesmo ganho estático e retirando o pólo não dominante em questão. Esta simplificação é possível pois a resposta deste pólo é tão rápida em comparação com os restantes pólos que não é determinante para o comportamento da resposta do sistema.

Outro factor determinante para a simplificação da função de transferência consiste em eliminar componentes de resíduos pequenos. A título de exemplo consideremos o sistema:

$$G(s) = \frac{bc}{a} \frac{(s+a)}{(s+b)(s+c)}$$

de ganho estático e cuja resposta é dada por:

$$Y(s) = \frac{bc}{a} \left(\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+b} + \frac{R_3}{s+c} \right)$$

para:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a}{bc} \\ R_2 &= \frac{a-b}{(-b)(c-b)} \\ R_3 &= \frac{-c+a}{(-c)(b-c)} \end{aligned}$$

que no domínio do tempo fica:

$$y(t) = \frac{bc}{a} (R_1 + R_2 e^{-bt} + R_3 e^{-ct})$$

As expressões dos resíduos indicam que à medida que $a \rightarrow b$ ou $a \rightarrow c$ o valor dessa constante que multiplica pela contribuição do pólo vai para zero. Para pólos não dominantes que tenham um zero próximo e com um resíduo desprezável em comparação com os restantes podemos cancelar o pólo com o zero, mantendo um ganho estático do sistema original.

11 Controladores Proportional-Integral-Derivative (PID)

O objectivo desta secção é introduzir os controladores PID nas suas variantes e introduzir a intuição de cada um dos ganhos e o seu

feito na resposta do sistema. A arquitectura genérica de um PID está representada na Figura 24.

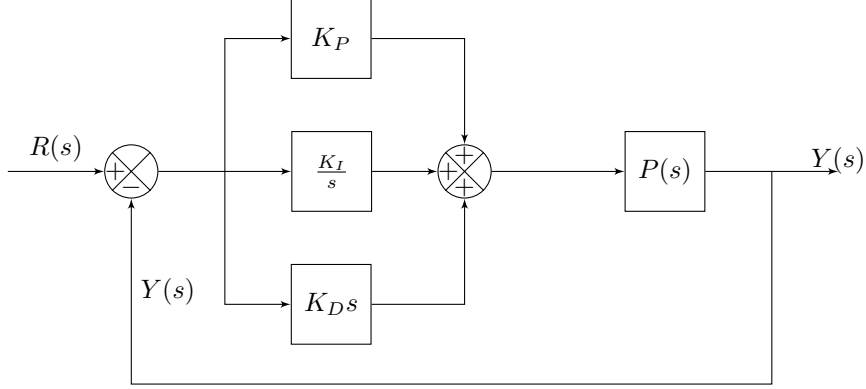


Figure 24: Arquitectura de um controlador Proporcional-Integrativo-Derivativo.

A função de transferência $P(s)$ é do processo a ser controlado e a componente do controlador pode ser descrita juntando os 3 sistemas em paralelo como $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$. Este tipo de controlador tem grande utilidade na indústria pela sua simplicidade, intuição no desenho dos ganhos K_P , K_I e K_D . A função de transferência da malha completa do controlador e do processo é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{bC(s)}{s^2 + as + b(1 + C(s))}$$

para um sistema de segunda ordem:

$$P(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

De seguida introduzimos as variantes deste tipo de controlador.

11.1 Controlador P

O controlador mais simples desta família é o controlador proporcional onde apenas é utilizado o ganho K_P de forma a que $C(s) = K_P$:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bK_p}{s^2 + as + b(1 + K_p)}$$

O ganho estático desta função de transferência é $\frac{K_P}{1+K_P}$ pelo que a primeira consequência da utilização deste controlador é a existência de erro no regime estacionário que desaparece à medida que se aumenta o valor do ganho. No entanto, aumentar o ganho causa um

valor de actuação de elevada magnitude que poderá não ser possível de executar na prática.

Dado que a função está na forma canónica de um sistema de 2ª ordem podemos calcular o coeficiente de amortecimento e a frequência natural:

$$\omega_n^2 = b(1 + K_P) \Rightarrow \omega_n = \sqrt{b(1 + K_P)}$$

$$2\zeta\omega_n = a \Rightarrow \zeta = \frac{a}{2\omega_n} = \frac{a}{2\sqrt{b(1 + K_P)}}$$

o que significa que aumentar o ganho torna a frequência ω_n maior (torna o sistema mais rígido), enquanto torna o coeficiente ζ mais pequeno tornando o sistema menos amortecido. Como temos apenas um parâmetro para escolher, existe um compromisso entre acelerar o sistema e o conseqüente aumento da sobrelevação.

11.2 Controlador PD

Um controlador do tipo P permite acelerar a resposta do sistema à custa de sobrelevação. Para mitigar esse efeito podemos utilizar um ganho derivativo. De notar que a utilização do ganho derivativo por si só não tem interesse dado que irá amplificar o ruído. Desta forma, para utilizar a componente derivativa deveremos recorrer a um PD ou PID. Se substituírmos na equação da malha completa com o controlador PD obtemos a função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b(K_P + K_D s)}{s^2 + (a + bK_D)s + b(1 + K_P)}$$

cujo o ganho estático continua igual ao do controlador P. Desta forma não estamos a corrigir o ganho em regime estacionário no entanto, dado os dois ganhos, podemos colocar os pólos onde seja necessário para satisfazer as restrições do sistema.

A forma típica de desenho destes controladores é usar o ganho K_P para escolher a frequência natural do sistema controlado dado que $\omega_n^2 = b(1 + K_P)$ (acelerar a resposta para o pretendido) e usar posteriormente o K_D para adicionar amortecimento ao sistema e diminuir a sobrelevação.

11.3 Controlador P-D

Existe um controlador do tipo PD que é usado quando a função de transferência do sistema dinâmico tem um pólo na origem, isto é:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{s}$$

A arquitectura de um controlador PD é recuperada na Figura 25. Ambos os ganhos estão em malha fechada com a função $G(s)$.

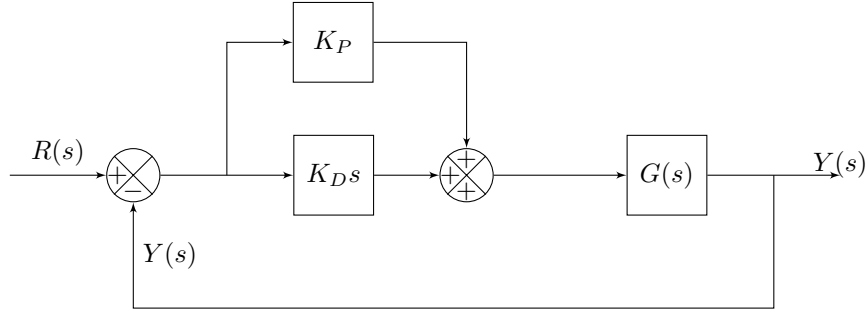


Figure 25: Arquitectura de um controlador Proporcional-Derivativo.

Como temos um pólo na origem e tipicamente este pode ser visto como a passagem entre a velocidade e a posição ou a aceleração e a velocidade, significa que podemos modificar a arquitectura para o representado na Figura 26, onde o ganho K_D afecta a malha interna com $G_1(s)$ enquanto o K_P é usado na malha externa.

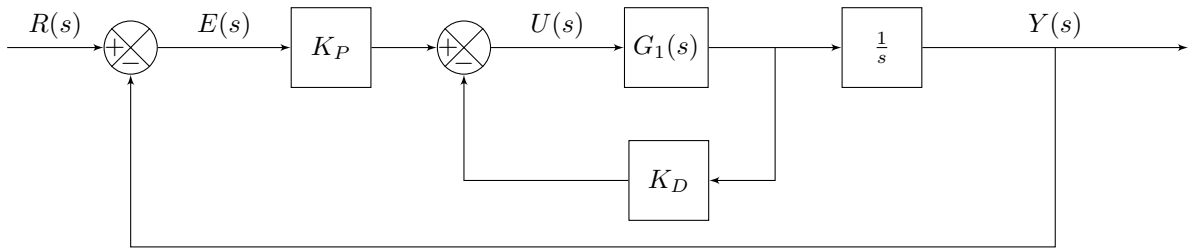


Figure 26: Diagrama de blocos para controlador P-D.

A estratégia de controlo típica para um controlador P-D é desenhar o ganho K_D de forma a que os pólos de $G_1(s)$ sejam suficientemente rápidos para satisfazer as restrições do sistema. De seguida, recorrer ao ganho K_P para colocar o pólo restante que será o dominante.

11.4 Controlador PI

Controladores com componentes proporcionais e derivativas não são capazes de corrigir o erro em regime estacionário para além de elevar o ganho proporcional para valores que tipicamente não serão aceitáveis na prática. Com o intuito de resolver esse problema

podemos acrescentar uma componente integrativa que reage à acumulação do erro. Esta componente não é utilizado sozinha dado que torna o sistema mais lento e oscilatório.

Ao substituírmos a função de transferência do controlador $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$ obtemos a função de transferência da malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b(K_P s + K_I)}{s^3 + as^2 + b(1 + K_P)s + bK_I}$$

que dado ser de 3ª Ordem previne a utilização das relações anteriormente encontradas. No entanto, podemos calcular o ganho estático da função:

$$G(0) = \frac{bK_I}{bK_I} = 1$$

pelo que a utilização da componente integrativa elimina o erro em regime estacionário. Para valores pequenos de K_I o sistema apresenta na mesma erro zero mas leva mais tempo para o atingir.

11.5 Controlador PID

A utilização de todas as componentes resulta num controlador PID. Usando a expressão completa para o controlador $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$, obtemos a função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b(K_P s + K_I + K_D s^2)}{s^3 + (a + bK_d)s^2 + b(1 + K_P)s + bK_I}$$

que embora tenha uma expressão não canónica pode ser utilizada a intuição construída anteriormente de i) simplificar a função de transferência eliminando pólos não dominantes; ii) encontrando cancelamento entre pólos e zeros ou por tentativa e erro. O mesmo se aplica a outro tipo de sistemas mais complexos. Um resumo da intuição sobre o que aumentar cada um dos ganhos faz na resposta do sistema é sumariado na Tabela 3.

	$K_P \uparrow$	$K_D \uparrow$	$K_I \uparrow$
Erro estacionário	↓	---	↓
Tempo subida	↓	---	?
Tempo estabelecimento	---	↓	?(↑)
Sobreelevação	↑	↓	?(↑)

Table 3: Intuição sobre consequência de aumentar cada um dos ganhos de um PID.

12 Materiais Avançados

Os alunos interessados podem querer aprofundar os seus conhecimentos no que toca a problemas de estimação relativas ao estado do sistema a partir das medidas vindas do sensor (semelhante ao conseguido através do filtro de Kalman) ou na área de controlo de múltiplos veículos. Os alunos podem escolher qualquer dos tópicos para executar o trabalho adicional.

Tópicos relacionados com a convergência de formações de robots estão nos artigos [1], [2], [3] e [4].

Como visto durante a Unidade Curricular, a estimação do estado do sistema dinâmico representando o sistema robótico em causa é um papel fundamental, para o qual foi introduzido o filtro de Kalman como método estocástico. Tópicos relacionados com a estimação no sentido determinístico estão disponíveis em [5], [6], [7] e [8].

A modelação não prevê a existência de erros ou falhas tanto nos sensores como atuadores que precisam de ser detectados. Utilizando os métodos de estimação podem ser definidos algoritmos de detecção de falhas como os exemplos em [9], [10], [11], [12] e [13].

Muitos algoritmos utilizados em software ou hardware podem ser modelados usando técnicas semelhantes às apresentadas para os modelos dinâmicos de sistemas robóticos como por exemplo em [14] e [15].

Um último exemplo mostra como é possível descobrir a fonte de um comportamento em que os nós de uma formação seguem um determinado algoritmo de propagação em [16].

References

- [1] D. Antunes, D. Silvestre, and C. Silvestre, “Average consensus and gossip algorithms in networks with stochastic asymmetric communications,” in *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pp. 2088–2093, Dec 2011.
- [2] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Finite-time convergence policies in state-dependent social networks,” in *American Control Conference (ACC), 2015, Chicago, Illinois, USA.*, pp. 1041–1046, July 2015.
- [3] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Set-consensus using set-valued observers,” in *American Control Conference (ACC), 2015, Chicago, Illinois, USA.*, July 2015.

- [4] D. Silvestre, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Broadcast and gossip stochastic average consensus algorithms in directed topologies,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, pp. 1–1, 2018.
- [5] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Self-triggered set-valued observers,” in *European Control Conference (ECC)*, pp. 3647–3652, July 2015.
- [6] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Fault detection for LPV systems using set-valued observers: A co-prime factorization approach,” *Systems & Control Letters*, vol. 106, pp. 32 – 39, 2017.
- [7] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Set-based fault detection and isolation for detectable linear parameter-varying systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 18, pp. 4381–4397, 2017. rnc.3814.
- [8] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Self-triggered and event-triggered set-valued observers,” *Information Sciences*, vol. 426, pp. 61 – 86, 2018.
- [9] D. Silvestre, P. Rosa, R. Cunha, J. Hespanha, and C. Silvestre, “Gossip average consensus in a byzantine environment using stochastic set-valued observers,” in *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4373–4378, Dec 2013.
- [10] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Finite-time average consensus in a byzantine environment using set-valued observers,” in *American Control Conference (ACC), 2014*, pp. 3023–3028, June 2014.
- [11] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Distributed fault detection using relative information in linear multi-agent networks,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 21, pp. 446–451, 2015. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFE-PROCESS 20, Paris, 2-4 September 2015.
- [12] D. Silvestre, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Fault detection for cyber-physical systems: Smart grid case,” in *23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Hong-Kong, China.*, July 2018.

- [13] D. Silvestre, P. Rosa, J. P. Hespanha, and C. Silvestre, “Stochastic and deterministic fault detection for randomized gossip algorithms,” *Automatica*, vol. 78, pp. 46 – 60, 2017.
- [14] D. Silvestre, J. Hespanha, and C. Silvestre, “A pagerank algorithm based on asynchronous gauss-seidel iterations,” in *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, pp. 484–489, June 2018.
- [15] D. Silvestre, J. Hespanha, and C. Silvestre, “Desynchronization for decentralized medium access control based on gauss-seidel iterations,”
- [16] H. Hao, D. Silvestre, and C. Silvestre, “Source localization and network topology discovery in infection networks,” in *37th Chinese Control Conference (CCC), Wuhan, China.*, July 2018.