

MICROECONOMIA

TEORIA DO PRODUTOR

Arlindo Alegre Donário

Ricardo Borges dos Santos

Universidade Autónoma de Lisboa

CARS - Centro de Análise Económica da Regulação Social

Novembro de 2014

(DRAFT)

TEORIA DO PRODUTOR

INTRODUÇÃO

Na teoria do consumidor, parte-se do princípio da racionalidade, da hipótese hedonista, que se traduz em o consumidor procurar obter o máximo de satisfação com o menor custo. Dai que para o consumidor racional as quantidades de bens procurados variam em função dos preços. Deste modo, quanto menores forem os preços maiores serão as quantidades procuradas. Vamos agora estudar a teoria do produtor, isto é, vamos estudar, o lado da oferta do mercado.

I

TEORIAS RELATIVAS AO OBJECTIVO DO PRODUTOR

INTRODUÇÃO

Na teoria neoclássica o objectivo do produtor é a maximização do lucro, tal como na teoria do consumidor o objectivo é a maximização da utilidade. Contudo, têm vindo a ser desenvolvidas outras teorias no que tange ao objectivo do produtor, as quais vamos expor resumidamente.

1.1. OBJECTIVO DO PRODUTOR – MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO. OUTRAS TEORIAS

A produção traduz-se no processo de combinar recursos (*inputs*) a fim de produzir bens e serviços, utilizando uma determinada tecnologia. Em economia o conceito de tecnologia refere-se ao método que pode ser usado para a combinação dos recursos a fim de produzir bens e serviços. Se uma empresa pode utilizar diferentes métodos para obter o mesmo nível de bens e serviços é

suposto que escolhe o método mais eficiente que lhe permite minimizar os custos.

1.1.1 – TEORIA TRADICIONAL. MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO

A teoria tradicional do produtor ou teoria da empresa parte do pressuposto que se procura maximizar o lucro. É uma teoria assente no princípio da racionalidade, afastando-se, assim, a hipótese de as empresas serem condicionadas por outros interesses.

Existem, contudo, outras teorias alternativas baseadas no pressuposto de que as empresas, sobretudo as grandes empresas (ou grupos), têm outros objectivos além da maximização do lucro.

1.1.2 - TEORIAS DA ADMINISTRAÇÃO (*MANAGEMENT THEORIES*). PROBLEMA DO PRINCIPAL-AGENTE. A TECNOESTRUTURA

Estas teorias desenvolveram-se nas décadas de 1960 e 1970 e referem-se a grandes empresas para as quais é pressuposto um divórcio entre os detentores do capital social (principalmente acções) e o controlo das mesmas pela administração.

Os detentores do capital, os accionistas, estão interessados na maximização do lucro, enquanto os administradores têm outros objectivos, nomeadamente o prestígio, o poder e o aumento dos seus rendimentos através de várias formas que não apenas o salário monetário directo.

Baumol refere que no sistema económico, dominado por grandes empresas ou grupos, o capital social está disperso e, em consequência, os fundadores deixam de controlar estas empresas, surgindo a questão que é conhecida em economia como “**PRINCIPAL-AGENTE**”, sendo os administradores os *agentes* e os accionistas os *principais*, o que leva a que os administradores tendam a actuar no sentido de buscar os seus interesses em detrimento dos principais¹,

¹ Baumol, William; Robert E. Litan; Carl J. Schramm (2007) - Good Capitalism, Bad Capitalism, and the Economics of Growth and Prosperity, p. 80 - Yale University Press

nomeadamente, aumentando a receita das vendas e não a maximização do lucro.

Os administradores procuram maximizar a sua função utilidade através dos salários, número de subordinados e outros benefícios adicionais². Nestes modelos é esperada a existência de determinado montante de lucro a fim de prover os fundos necessários à empresa e também *contentar* os accionistas, o que reduz o risco de estes venderem as acções baixando o risco da existência de *takeovers*.

Galbraith, no seu livro “O Novo Estado Industrial”, criou o conceito de **TECOESTRUTURA**, integrando este conceito uma entidade colectiva com a tarefa de desenvolver o planeamento, a manipulação dos preços e a publicidade. E é esta *tecnoestrutura*, constituída pelos *tecnocratas*, que predominantemente conduz os destinos das grandes empresas. O poder económico, dentro destas grandes empresas (na maioria dos casos organizadas em grupos, constituídos por entidades jurídicas com personalidade jurídica própria), está bastante concentrado na *tecnoestrutura*, sobre todo quando existe dispersão do capital social por muitos accionistas quando nenhum deles é dominante.

A grande empresa, constituída sob a forma de sociedade anónima, *“ajusta-se admiravelmente às necessidades da tecnoestrutura. Esta é um aparelho de decisão em grupo – para reunir e verificar as informações fornecidas por muitos indivíduos visando chegar a decisões que estão além do conhecimento de, qualquer deles.”* (Galbraith,1979:69)

1.1.3 - MODELO COMPORTAMENTAL E GRUPOS DE INTERESSES NA EMPRESA

O modelo comportamental, que foi desenvolvido por Herbert Simon³, na década de 1960, considera a empresa (sobretudo as grandes) não com o objectivo da maximização do lucro (como é entendido pela teoria tradicional), dada a existência de vários grupos de interesses ligados à empresa – administradores, trabalhadores, fornecedores, clientes – que têm interesses diferentes, podendo

² Williamson, Oliver (1996) - The Mechanisms of Governance - Oxford University Press, pp. 24, 31, 328, 351, 362.

³ Simon, H.A. (1982) - Models of Bounded Rationality (Volumes 1 and 2), Cambridge, MA – MIT Press

conflituar, mas estes grupos (excepto os administradores) têm um conhecimento limitado da empresa e dos interesses dos outros grupos, pelo que surge uma coalizão de interesses que leva a que, segundo Simon, o objectivo seja a satisfação dos interesses dos vários grupos não a maximização do lucro. Herbert. Simon considerava que os constrangimentos institucionais e cognitivos teriam de ser tidos em conta nos objectivos da empresa, podendo ser considerados como constrangimentos para a maximização do lucro.

FOLGA ORGANIZACIONAL. (ORGANIZATIONAL SLACK)

Estes modelos podem levar ao que é conhecido ***folga organizacional*** (***organizational slack***) que servirá para reduzir os conflitos, promover comportamentos políticos ou facilitar comportamentos estratégicos.

Nas empresas onde existe a *folga organizacional* certos membros da empresa podem receber pagamentos acima do que seria necessário para que continuassem na organização, o que implica que a empresa não minimiza os custos pois, nestes casos os factores produtivos, sobretudo o factor força de trabalho ou capital humano, não está a ser eficientemente utilizado, segundo a teoria tradicional.

A folga organizacional pode ser entendida como o excesso de capacidade mantida pela empresa, onde os recursos não estão a ser totalmente utilizados, estando alguns trabalhadores ser pagos acima do necessário para se manterem na empresa.

DIFERENÇA ENTRE EFICIÊNCIA TECNOLÓGICA E EFICIÊNCIA ECONÓMICA

Existem dois conceitos de eficiência produtiva: eficiência tecnológica e eficiência económica, que importa não confundir.

A EFICIÊNCIA TECNOLÓGICA verifica-se quando a empresa obtém uma dada produção com a mínima quantidade de factores produtivos.

A EFICIÊNCIA ECONÓMICA ocorre quando a empresa obtém um dado produto com o mínimo custo. A eficiência económica depende do preço dos factores utilizados na produção.

Um método que seja tecnologicamente ineficiente nunca é economicamente eficiente. Contudo, podem existir métodos que são tecnologicamente ineficientes e que sejam economicamente eficientes, dependendo do preço dos factores de produção. A eficiência económica depende dos custos relativos dos factores de produção e do seu grau de substituíbilidade.

II

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO – LEI DOS RENDIMENTOS MARGINAIS FINALMENTE DECRESCENTES E ECONOMIAS DE ESCALA

INTRODUÇÃO

No processo produtivo as empresas combinam factores produtivos, obtendo bens e serviços com o objectivo de serem vendidos a fim de se obter a realização da mais-valia, ou seja, a obtenção de lucros.

Os factores produtivos podem ser classificados em grandes categorias, como o trabalho, matérias-primas e capital, podendo cada uma destas categorias ser subdividida em classes mais restritas.

As matérias-primas são os elementos que são integrados no produto final e que transmitem o seu valor a esse produto, constituindo um dos elementos dos custos de produção.

O capital é constituído pelos edifícios e equipamento, cuja duração se estende por mais de um período do processo produtivo e cujo valor se vai transmitindo, parcialmente, ao produto final, consubstanciando nas amortizações e depreciações que também constituem um dos elementos do custo de produção.

SALÁRIO BRUTO - O trabalho é outro factor de produção constituindo outro elemento do custo de produção, e que é consubstanciado nos salários brutos. No conceito de salário bruto integramos o salário pago ao trabalhador, as contribuições para a segurança social que são função do salário pagão ao trabalhador e ainda se deverá acrescentar a este conceito de salário bruto o custo de oportunidade, suportado pela empresa, consubstanciado na ocupação de um posto de trabalho.

2.1 – A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO

A relação entre a produção (*output*) por período de tempo e os factores de produção (recursos) ou *inputs* utilizados no processo produtivo designa-se por função de produção, a qual pode ser expressa algebricamente pela seguinte equação:

$$Q = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

onde Q representa o produto ou *output* e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são os factores produtivos ou *inputs* utilizados, os quais podem ser de vária natureza, nomeadamente, podem ser utilizados vários tipos de capital e força de trabalho com qualidade e quantidades diferentes. Note-se que a função de produção é análoga à função utilidade no âmbito da teoria do consumidor.

A função de produção é uma relação tecnológica entre os *inputs* (factores produtivos) e o *output* – produzindo o máximo *output* que pode ser obtido com as várias combinações dos factores produtivos, o que significa que, no conceito de função de produção, os *inputs* são utilizados eficientemente no processo produtivo, ou seja, existe **eficiência de produção à Pareto**, não existindo qualquer *folga* (*slack*) na empresa, estando-se no âmbito da teoria tradicional da *maximização do lucro*, como vimos anteriormente.

No longo prazo qualquer factor produtivo pode variar, levando a que a função de produção tenda a variar no mesmo sentido, excepto quando a produtividade marginal de algum factor de produção for negativa.

DIFERENCIAÇÃO PARCIAL DA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO

Na função de produção, com vários factores, podem utilizar-se as derivadas parciais ($\partial Q / \partial x_i$ ou f_{xi}) do produto, Q , em relação a cada um dos factores, x_i , que traduzem o impacto no produto ou *output* da variação de cada factor enquanto todas as **outras variáveis (factores de produção, *inputs*) são consideradas constantes** (sendo semelhante a uma experimentação controlada).

Designa-se por **derivada parcial de Q em relação a uma das variáveis independentes da função**, por exemplo em relação a x_1 , para indicar que **todas as outras variáveis explicativas da função são consideradas constantes**, quando se analisa uma derivada de um factor (ou variável) particular.

No caso da função de produção com apenas duas variáveis explicativas, capital, K, e trabalho, L, tem-se:

$$Q = f(K, L)$$

As produtividades marginais do capital e do trabalho são traduzidas pelas derivadas parciais do produto, Q, em relação a cada uma destas duas variáveis:

$$f'_K (K \cdot L) = \frac{\delta Q}{\delta K}$$

sendo f'_K a derivada parcial de Q em relação a K, traduzindo a produtividade marginal do capital.

Do mesmo modo, a produtividade marginal do trabalho será dada pela derivada parcial de Q em relação a L:

$$f'_L (K \cdot L) = \frac{\delta Q}{\delta L}$$

2.2 - O CURTO E LONGO PRAZOS

Como variam os custos com a produção? A resposta a esta questão encontra-se na análise temporal do curto e longo prazos. Os custos em que uma empresa ou indústria incorre para produzir uma determinada quantidade de bens e serviços dependem dos tipos de ajustamentos que podem fazer aos vários montantes de factores produtivos que empregam.

Algumas quantidades empregadas de vários factores produtivos podem variar facilmente e com rapidez. É o caso da mão-de-obra (factor força de trabalho) e das matérias-primas.

No caso da força de trabalho é necessário considerar os constrangimentos institucionais e legais, pois que os contratos de trabalho tendem a introduzir

alguma rigidez na variabilidade deste factor produtivo, dado que os mesmos podem ser contratos de trabalho sem termo, de duração ilimitada, ou a termo certo com duração mais ou menos longa, podendo ainda verificar-se os contratos de prestação de serviços que são os mais flexíveis.

Quanto a outros factores de produção já é mais difícil a sua alteração rápida, pois necessitam de mais tempo para se ajustarem, como por exemplo, a capacidade ou escala de uma fábrica. Daí que distingamos entre:

- **CURTO PRAZO**, quando a empresa pode variar (aumentando ou diminuindo) alguns mas não todos os seus factores produtivos com o objectivo de produzir uma quantidade de bens e serviços maior ou menor.

Normalmente uma empresa, no curto prazo, para atender uma maior procura, aumenta a sua produção procurando mais força de trabalho e comprando mais matérias-primas, mas mantendo a sua capacidade produtiva. Neste caso a empresa mantém, pelo menos, um factor produtivo fixo. O curto prazo é o período de tempo durante o qual pelo menos um factor produtivo é fixo, verificando-se a *lei dos rendimentos marginais finalmente decrescentes*.

- **O LONGO PRAZO** está relacionado com a possibilidade de a empresa poder variar todos os factores produtivos, incluindo a escala da sua produção e o seu equipamento. O longo prazo é o período de tempo bastante para que todos os factores produtivos possam variar. Deste modo, no longo prazo não existem custos fixos pois todos os factores produtivos são variáveis.

A distinção entre factores fixos e factores variáveis permite-nos distinguir entre curto e longo prazos.

2.3 - CURTO PRAZO - LEI DOS RENDIMENTOS MARGINAIS FINALMENTE DECRESCENTES OU LEI DO PRODUTO MARGINAL FINALMENTE DECRESCENTE

Podemos definir o produto físico marginal de um factor produtivo como o produto adicional que pode ser obtido com mais uma unidade adicional de um factor produtivo, mantendo constantes todos os outros factores.

A **lei dos rendimentos (produto) marginais finalmente decrescentes** traduz a ideia de que à medida que se vão adicionando unidades sucessivas de um factor variável (por exemplo o factor trabalho) a um ou vários factores fixos (por exemplo capital e terra) – ***ceteris paribus*** - para além de certo ponto, o produto adicional (marginal) do factor variável diminuirá.

O produto marginal de um factor é o acréscimo do produto total devido à utilização de mais uma unidade desse factor, mantendo os outros factores constantes.

Esta lei traduz uma relação tecnológica entre os diversos factores de produção. A lei dos rendimentos finalmente decrescentes influencia a forma da curva do produto, da curva do produto marginal, da curva do produto total e da curva do produto médio.

Quando se adicionam unidades de um factor variável a outros factores fixos, numa primeira fase as unidades adicionais podem originar acréscimos no produto total maiores do que as unidades anteriores, traduzindo uma taxa de crescimento crescente do produto.

Estes iniciais aumentos marginais dos rendimentos, entre outras razões, **podem dever-se à especialização** que aumenta a eficiência, traduzindo a ideia da “**divisão do trabalho**”, conceito que foi enfatizado por **Adam Smith.**, na **Riqueza das Nações (1776)** e que já foi analisado por **Xenofonte** há mais de 2300 anos.

Contudo, depois de certo ponto, ao aumentar-se mais uma unidade do factor variável, o produto marginal declina, pelo que o produto total vai aumentando mas a uma taxa decrescente. Por outras palavras, quando o produto total aumenta a uma taxa decrescente à medida que mais uma unidade de um factor variável é adicionada, ***ceteris paribus***, está-se em presença da lei dos rendimentos marginais decrescentes.

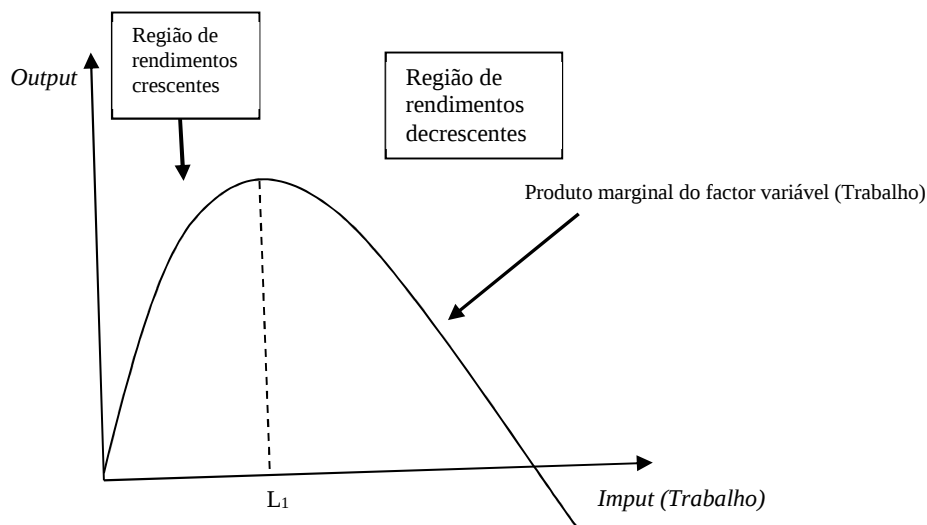
A lógica que fundamenta esta lei traduz-se no seguinte: quando o emprego de um recurso aumenta gradualmente enquanto todos os outros permanecem fixos, a proporção entre os vários factores de produção torna-se mais eficiente **numa**

primeira fase, sendo a taxa de variação do produto total crescente, ou seja, o produto marginal aumenta.

Contudo, a partir de certo nível, o factor variável em combinação com os outros factores fixos torna-se menos eficiente, levando a que o produto marginal do factor variável é decrescente à medida que novas unidades adicionais são adicionadas aos factores fixos.

Gráfico

Lei dos rendimentos marginais finalmente decrescentes



Na anterior figura podem observar-se as **duas regiões**. Na primeira, o rendimento marginal do factor variável, ***ceteris paribus***, é crescente até L_1 , sendo depois decrescente, até se tornar negativo.

Dado que a **lei dos rendimentos marginais finalmente decrescentes** assume a existência de um ou vários factores fixos, **apenas é aplicável no curto prazo**, pois no longo prazo não existem factores fixos.

2.3.1 - APENAS UM FACTOR VARIÁVEL NA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO.

Considere-se que os factores produtivos $x_2, x_3, \dots, x_n$ são fixos, (bem como a tecnologia) enquanto o factor x_1 pode variar, ou seja, apenas o emprego de um factor, x_1 , varia. É a condição ***ceteris paribus***. Deste modo, a variação do produto, Q , no curto prazo, é apenas função de x_1 :

$$Q = f(x_1)$$

que é uma **função de produção de curto prazo**, dado que se consideram todos os factores fixos excepto um deles, x_1 , sujeita à *lei do produto marginal finalmente decrescente*, pelo que o produto cresce com o aumento de unidades adicionais de x_1 mas a uma taxa decrescente a partir de certo ponto, sendo a sua representação gráfica uma curva côncava, pelo menos a partir de certo nível de produção.

A função de produção tem como pressuposto que o *output* obtido com os recursos disponíveis é máximo, ou seja, a produção é eficiente.

Considere-se que o factor variável, x_1 , é o trabalho, que representamos por L , representando o factor capital por K , que é considerado fixo, pelo que a função de produção, no curto prazo, é constituída por dois factores de produção, e será dada pela seguinte expressão:

$$Q = f(L, \bar{K})$$

onde $\bar{K}$ significa que o factor capital é considerado fixo, pelo que a função de produção pode tomar a seguinte forma:

$$Q = f(L)$$

o que significa que o montante de produção, **no curto prazo**, é determinado pelo número de horas de trabalho (L), pois K é considerado fixo. Tomemos como exemplo os valores do quadro seguinte:

Quadro 2.3.1.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
K	L	Q	Pmg_L	$PM_L = Y/L$
1	0	0	0	0
1	1	4	4	4
1	2	9	5	4.5
1	3	13	4	4.33
1	4	16	3	4
1	5	18	2	3.6
1	6	18	0	3.00
1	7	17	-1	2.43
1	8	14	-3	1.75

onde:

K – representa o factor capital;

L – representa o factor trabalho;

Q – representa o produto total para cada nível de produção;

$Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ representa o produto ou produtividade marginal do trabalho,

$PM = \frac{Q}{L} = \frac{f(L)}{L}$: representa a produtividade média do trabalho, relacionando-se as quantidades totais de $f(L)$ e L , que, numa representação gráfica, a produtividade média (PM) é traduzida pela inclinação da linha que liga a origem dos eixos a um determinado ponto da função de produção.

Por simplificação, considera-se que as unidades de capital, trabalho e o bem produzido são homogéneos ou da mesma qualidade.

O produto médio do trabalho (PM_L), coluna (5), é definido pela divisão do produto total pelo número de unidades de trabalho utilizadas, ou seja, Q/L .

O PRODUTO MARGINAL DO TRABALHO, Pmg , coluna (4), é dado pela variação do produto total por unidade de trabalho (que é obtido pela diferença do produto total entre sucessivas quantidades). Por outras palavras, e utilizando a letra grega Δ (delta) para significar a variação, o Pmg_L do trabalho é a variação no produto total (ΔQ) dividida pela variação da quantidade de trabalho utilizada (ΔL):

$$Pmg = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

ou, em termos diferenciais,

$$Pmg = \frac{dQ}{dL}$$

Esta definição diz-nos como varia a produção quando se utiliza mais uma unidade de trabalho. Para um dado ponto da curva da função de produção, **$Q(L)$** , a **produtividade marginal é dada pela inclinação da tangente geométrica à curva nesse ponto, que traduz a derivada parcial do produto em relação a L .**

MATEMÁTICA DA PRODUTIVIDADE MARGINAL (Pmg)

A produtividade marginal do trabalho pode obter-se utilizando o cálculo diferencial. Considerando a função de produção $Q = f(L)$, derivando esta função em ordem a L , obtém-se:

$$\frac{dQ}{dL} = \frac{d f(L)}{dL}$$

$$Pmg = \frac{dQ}{dL} = f' (L)$$

A produtividade marginal do trabalho traduz-se na derivada da função de produção em relação a este factor L . Em termos gráficos, a Pmg_L é dada pela inclinação da tangente geométrica à curva da função de produção, em cada ponto da curva.

Resulta, desta análise, que a produção cresce, permanece constante ou diminui, consoante a produtividade marginal do trabalho seja positiva, nula ou negativa.

Não se deve confundir rendimentos marginais decrescentes com rendimentos decrescentes, que são conceitos totalmente diferentes.

Os rendimentos marginais decrescentes podem ser positivos e, neste caso, fazem com que o produto total cresça mas a uma taxa decrescente.

No caso de **rendimentos decrescentes**, o significado é que se poderia aumentar a produção com a utilização de menos factores produtivos. Se existem *rendimentos decrescentes* é porque os rendimentos marginais do

factor variável são negativos, o que contradiz o princípio da maximização do lucro.

Deverá também notar-se que quando se faz variar o factor trabalho juntamente com o capital e a tecnologia, o produto marginal do trabalho pode crescer indefinidamente. Neste caso não estamos perante a lei dos rendimentos marginais finalmente decrescentes mas numa situação de retornos à escala.

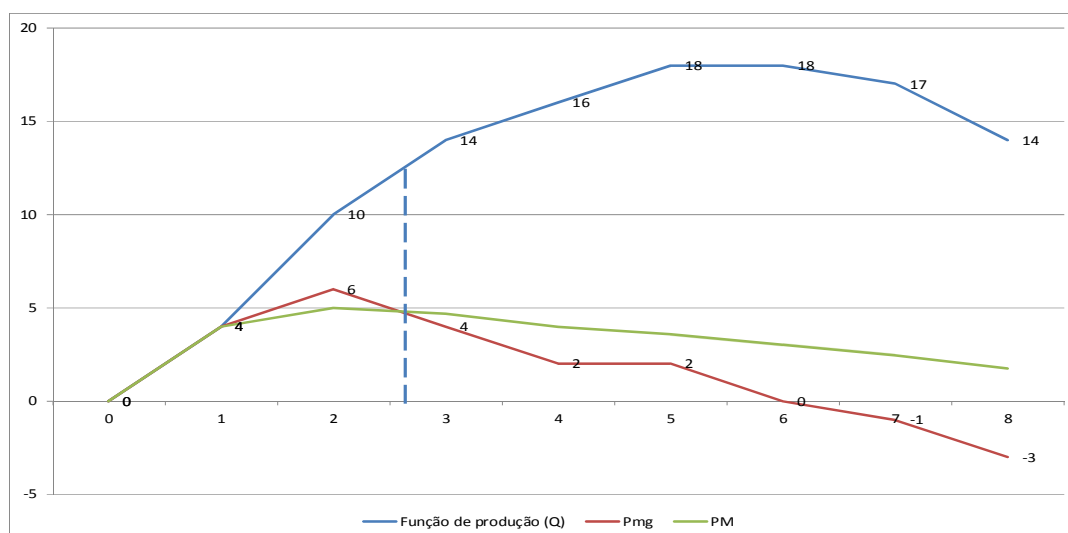
Pode observar-se, na coluna (4), que o produto marginal do trabalho para a primeira unidade de trabalho é 4, para a segunda unidade é 6 (o produto marginal aumentou), descendo, depois, até se tornar negativa.

Note-se que a diminuição do produto marginal a partir do terceiro trabalhador não significa que em termos individuais estes trabalhadores adicionais sejam menos produtivos, mas essa diminuição do produto marginal deriva de uma relação tecnológica entre os diversos factores de produção. Assume-se, como pressuposto, que todos os trabalhadores são homogéneos em termos da produtividade marginal individual.

No gráfico seguinte podem observar-se as curvas da função de produção (Q), do produto marginal do trabalho (PMg_L) e do produto médio do trabalho (PM_L).

Gráfico 2.3.1.1

Função de produção, Q , produto marginal (Pmg_L) e produto médio (PM_L)



No gráfico anterior, no eixo horizontal, são consideradas as unidades de trabalho (factor variável) e no eixo vertical são consideradas as quantidades de bens produzidos.

Quando a função de produção $Q=f(L)$ passa por um máximo, a produtividade marginal (Pmg_L) será nula, significando que a produção aumenta até ao ponto em que a produtividade marginal do trabalho se anula, o que pode ser observado no gráfico, correspondendo ao sexto trabalhador.

O sétimo e oitavo trabalhadores têm uma produtividade marginal negativa pelo que a função de produção passa a ser decrescente. A fim de maximizar o lucro, a produção deverá desenvolver-se até ao ponto em que a produtividade marginal do factor trabalho se anule, situação onde o produto total atinge o máximo.

Note-se que os conceitos de produto total, produto marginal e produto médio aplicam-se a qualquer factor produtivo e não apenas ao factor trabalho.

O máximo da curva do Pmg_L corresponde ao **ponto de inflexão da função de produção**, que **passa de convexa para côncava em relação à sua origem**, o que se dá ao nível do segundo trabalhador (no exemplo dado), iniciando-se neste ponto a *lei dos rendimentos marginais decrescentes*. Até à utilização do segundo trabalhador a função de produção cresce a uma taxa crescente verificando-se, neste segmento *rendimentos marginais crescentes*. Neste segmento da curva da função de produção a primeira e segunda derivadas são positivas.

Quando a produtividade marginal é crescente tal significa que a função de produção varia a uma taxa crescente e a sua curva é convexa em relação à origem neste segmento, sendo, neste segmento da função de produção, a primeira derivada positiva (a função é crescente) e a segunda derivada é negativa, traduzindo a taxa decrescente da variação da função.

O crescimento da produtividade marginal numa fase inicial pode ser explicado devido ao factor fixo não estar a ser eficientemente utilizado pelo que, adicionando mais unidades do factor variável pode dar lugar a produções adicionais crescentes, o que leva a que a curva da função de produção seja convexa (em relação à origem) nesta fase.

Quando a produtividade marginal é decrescente a função de produção cresce mas a uma taxa decrescente e a parte da curva correspondente é côncava em relação à origem, traduzindo a lei dos rendimentos marginais decrescentes. Nesta fase, no que respeita à função de produção, a primeira derivada é positiva e a segunda derivada é negativa: $f'(L) > 0$ e $f''(L) < 0$.

FUNÇÕES CONVEXAS

Considerando a função do produto total, $Q = f(L)$, quando o seu crescimento se verifica a uma taxa crescente, as primeira e segunda derivadas da função são maiores que zero, ou seja, a função é convexa⁴ em relação à origem quando:

⁴ Tecnicamente uma função é convexa quando os valores da função são inferiores aos valores da **combinação convexa**, dada pela corda que une dois pontos (x_1 e x_2) da curva da função. Uma **combinação convexa** dos vectores x_1 e x_2 é uma **média ponderada** dada pela expressão

$$p x_1 + (1-p) x_2,$$

para qualquer valor específico de p entre 0 e 1. Uma combinação convexa é um caso particular de uma **combinação linear**.

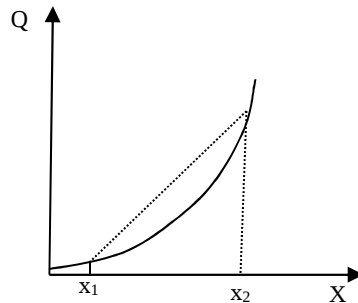
Uma **combinação linear** de dois vectores x_1 e x_2 é dada pela expressão:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2$$

onde k_1 e k_2 são escalares. Quando estes escalares, k_1 e k_2 pertencem ao intervalo $[0, 1]$ e a sua soma é um, tem-se uma combinação convexa.

$$f'(L) > 0 \text{ e } f''(L) > 0$$

A **segunda derivada evidencia a taxa de variação da função**. O gráfico seguinte mostra uma função convexa, com a primeira e segunda derivadas positivas.



Na primeira fase a função de produção é convexa, traduzindo a taxa crescente da produtividade marginal do factor trabalho.

FUNÇÕES CÔNCAVAS⁵

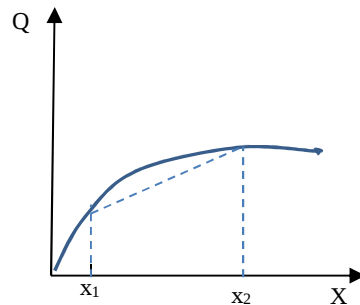
Uma função é côncava quando o seu crescimento se verifica a uma taxa decrescente, **sendo a primeira derivada da função positiva e a segunda derivada da função menor que zero**, ou seja, a função é côncava em relação à origem quando:

$$f'(L) > 0 \text{ e } f''(L) < 0$$

neste caso a função é crescente mas a sua taxa de variação é decrescente, traduzida, matematicamente, pela segunda derivada negativa. É o caso da função de produção a partir do ponto de inflecção determinado pela diminuição da taxa marginal do factor trabalho.

A representação gráfica de uma função côncava pode ser observada no gráfico seguinte:

⁵ Uma função é **côncava** quando os valores da função são superiores aos valores da combinação convexa que une dois pontos da curva da função, x_1 e x_2 .



Os valores da **combinação convexa** são inferiores aos valores da função, excepto nos extremos, onde os valores são iguais.

A parte decrescente da curva do PM (produto médio) ilustra a lei dos rendimentos marginais decrescentes. Existe uma relação entre o PMg e o PM. O PM é crescente enquanto o Pmg for superior ao PM. O PM é decrescente quando o Pmg é inferior ao PM.

2.3.2 - ELASTICIDADE DO PRODUTO, PRODUTIVIDADE MARGINAL, PRODUTIVIDADE MÉDIA E PRODUTO TOTAL. ESTÁGIOS DE PRODUÇÃO

Importa considerar o conceito de *elasticidade referente ao produto total* (função de produção). A elasticidade do produto traduz a percentagem de variação do produto resultante de uma dada variação percentual de um factor produtivo (*input*), *ceteris paribus*, ou seja, considerando todos os outros recursos constantes. Mais formalmente tem-se a **elasticidade da produção em relação ao factor trabalho**:

$$\eta_q = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q}$$

ou, utilizando o cálculo diferencial, a elasticidade num ponto será dada por:

$$\eta_q = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dL}{L}} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q}$$

Considerando que o produto marginal do trabalho é dado por:

$$Pmg_L = \frac{dQ}{dL}$$

e o produto médio é dado pela seguinte expressão:

$$PM = \frac{Q}{L}$$

O inverso do produto médio, PM, é dado por:

$$\frac{1}{PM}$$

substituindo estes valores na expressão da elasticidade do produto, tem-se:

$$\eta_q = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} = Pmg \cdot \frac{1}{PM} = \frac{Pmg}{PM}$$

ou seja, a elasticidade do produto total em relação a um factor de produção (no caso em apreço o factor trabalho), *ceteris paribus*, é igual à razão entre a produtividade marginal do factor variável (Pmg) e a produtividade média (PM) desse factor.

Esta relação tem importância para a decisão do nível de produção de uma empresa. Como efeito, relacionando o Pmg e o PM tem-se:

$$\text{Se } Pmg < PM, \rightarrow \eta_q < 1$$

$$\text{Se } Pmg > PM, \rightarrow \eta_q > 1$$

$$\text{Se } Pmg = PM, \rightarrow \eta_q = 1$$

2.3.2.1 - FASES DE PRODUÇÃO

Consideremos a relação entre o Pmg, o PM e o produto total, Q. Quanto ao produto total ou função de produção, $Q=f(L)$, podem considerar-se três fases, que podem ser visualizadas no gráfico 2.3.1.1, e que estão relacionadas com a *lei dos rendimentos marginais finalmente decrescentes*:

Para analisarmos o que denominamos como **fases de produção** e ter em conta a elasticidade da produção, consideramos a evolução da produtividade marginal e da produtividade média e o seu impacto na produção total. Tanto a produtividade marginal do *input* variável como a produtividade média do mesmo aumentam numa primeira fase da produção, eventualmente atingem um máximo e depois declinam, o que pode ser visualizado no gráfico 2.3.1.1.

O produto médio (PM) é igual ao produto marginal (Pmg), $PM=Pmg$, quando o PM atinge o seu máximo. Se o $Pmg > PM$, os incrementos do produto marginal levam a que o produto médio aumente. Se o $Pmg < PM$, o produto médio diminui.

Assim, necessariamente, o máximo do produto médio é atingido quando $Pmg=PM$.

O produto total atinge o seu máximo quando o produto marginal é zero, o que pode ser observado no gráfico 2.3.1.1. A análise da função de produção permite destacar três fases de produção. Estas fases correspondem a áreas da função de produção que as empresas deverão considerar para produzir, e outras áreas que não serão de considerar, tendo em conta o **princípio da racionalidade**, por parte das empresas, traduzido na *maximização do lucro*.

Inicialmente os rendimentos marginais do factor variável são crescentes (no exemplo dado, o factor trabalho), sendo a taxa de crescimento da função de produção crescente (nesta fase a curva da função de produção é convexa relativamente à origem), sendo a primeira e segunda derivadas da função positivas.

Essas fases podem ser classificadas do seguinte modo:

- a) **FASE I** - Uma primeira fase inclui a região desde o início da produção (em termos gráficos, desde a origem) até ao nível de utilização do factor variável (no caso o trabalho) em que o produto médio do *input*, PM, atinge o máximo. Ao longo desta fase, denominada por fase I, o produto médio é crescente, não obstante o produto marginal já esteja a decrescer no final da fase.

Contudo, dado que o Pmg, embora a decrescer, é superior ao PM, este cresce. Pode considerar-se que nesta fase o montante do factor variável (trabalho) é relativamente pequeno em relação ao factor fixo (capital), implicando uma produção ineficiente, não obstante o produto total tenha uma evolução crescente.

Nesta fase I a elasticidade do produto total é maior que um, dado que $Pmg > PM$, $\rightarrow \eta_q > 1$. Assim, nesta fase, a Pmg é máxima e também a PM é máxima no limite da fase I com a fase II.

Sendo $\eta_q > 1$ implica que um aumento de 1% do factor trabalho (factor variável) leva a um aumento do produto (ΔQ) superior a 1%. Ora, considerando o **axioma da maximização do lucro** por parte da empresa, não é aceitável o nível de produção nesta fase, pelo que a produção deverá aumentar, pois não se estaria a produzir eficientemente, dado que implicaria a utilização do factor fixo, capital, de forma ineficiente. Nesta fase I a curva do produto total é convexa até ao ponto em que a Pmg atinge o seu máximo, sendo depois côncava até ao final da fase,

- b) **FASE II** – A fase II corresponde ao declínio da produtividade marginal do factor variável, o trabalho (rendimentos marginais decrescentes), levando a que o produto total cresça mas a uma taxa decrescente (nesta fase intermédia a curva do produto total é côncava em relação à origem) sendo a primeira derivada positiva e a segunda derivada negativa. Esta fase II inclui a região entre o ponto máximo do produto médio e o ponto em que o produto marginal se anula. Nesta fase tanto o Pmg como o PM são decrescentes mas ambos são ainda positivos.

Nesta fase a elasticidade do produto é inferior a um, pois $Pmg < PM$, pelo que

$$\eta_q = \frac{dY}{dL} \cdot \frac{L}{Y} = \frac{Pmg}{PM} < 1$$

- c) **FASE III** - Na terceira fase a produtividade marginal do factor variável é negativa, o que implica que a produção total decline (pelo que a primeira e segunda derivadas são negativas).

Uma empresa que tenha por objectivo a maximização do lucro nunca utiliza uma quantidade de um *input* que leve a que a sua produtividade marginal seja negativa, dado que, se o fizesse, poderia sempre diminuir a utilização desse factor com produtividade marginal negativa e, deste modo, o *output* aumentaria e os custos diminuiriam, implicando um aumento dos lucros, na hipótese de toda a produção ser vendida.

Nesta fase III o montante disponível dos recursos fixos por unidade do factor variável (trabalho) é muito baixo para se obter uma produção eficiente.

Na fase III a elasticidade do produto total é negativa, dado que a $P_{mg} < 0$, pelo que é uma fase que, racionalmente, não deverá ser tida em conta para desenvolver a produção, dado que não se deverá empregar um recurso que tenha uma produtividade negativa. Contudo, tal situação pode verificar-se quando existe uma *folga organizacional*, quanto à utilização do factor trabalho, que poderá ser utilizada para reduzir os conflitos na empresa, promover comportamentos políticos ou facilitar comportamentos estratégicos, como foi referido.

Analisadas as três fases de produção conclui-se que a região de produção corresponde à fase II, em que a elasticidade do produto é positiva mas menor que um.

III

LONGO PRAZO - RETORNOS RELACIONADOS COM A ESCALA DE PRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

A análise de curto prazo relaciona os custos com o produto para um tamanho ou escala específica da empresa. É pressuposto que no curto prazo a dimensão da empresa permanece inalterada. **No longo prazo todos os factores são variáveis.**

Uma questão importante que se coloca às empresas é acerca de como o produto responde a aumentos simultâneos de todos os factores produtivos, considerando, na análise, apenas os factores capital e trabalho. **Por exemplo, se todos os factores forem duplicados que acontece ao produto?**

A resposta a esta questão traduz-se nos **rendimentos ou retornos à escala em relação à função de produção** que se podem classificar em:

- **Economias de escala crescentes;**
- **Economias de escala constantes;**
- **Deseconomias de escala ou economias de escala decrescentes.**

Esta classificação relaciona-se com os efeitos na variação do produto quando **se alteram todos os factores produtivos** da função de produção. Têm-se rendimentos à escala crescentes, constantes ou decrescentes se, quando todos os factores produtivos aumentam numa dada proporção, o produto do bem em causa aumenta em maior proporção, aumenta na mesma proporção ou aumenta numa proporção menor, respectivamente. Quando todos os factores produtivos aumentam por uma determinada percentagem e o produto aumenta na mesma percentagem a função de produção tem rendimentos constantes à escala.

DIFERENÇA ENTRE OS CONCEITOS DE RENDIMENTOS MARGINAIS DECRESCENTES E RENDIMENTOS DECRESCENTES À ESCALA.

Existe grande diferença entre os conceitos de *rendimentos marginais decrescentes* e *rendimentos decrescentes à escala*. São diferentes por duas razões principais.

A mais importante diferença consiste em que o **rendimento marginal decrescente é um conceito de curto prazo** que descreve o efeito no produto do aumento de um recurso produtivo mantendo todos os outros constantes.

Os rendimentos decrescentes à escala traduzem-se um conceito que descreve o efeito no produto pela variação de todos os factores produtivos na mesma proporção.

A segunda diferença traduz-se em que o **rendimento marginal decrescente** trata com quantidades marginais, enquanto o conceito dos **rendimentos decrescentes à escala** trata com quantidades totais e médias.

3.1 - FUNÇÕES HOMOGÉNEAS

Quando uma função tem n variáveis independentes, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, tal como acontece na função de produção, importa saber qual é o efeito na função quando todas as variáveis variam na mesma proporção, ou seja, **quando todas as variáveis são multiplicadas pelo mesmo factor λ** .

Uma função é homogénea de grau r , se multiplicando todos os argumentos (variáveis) da função por um escalar (constante) $\lambda (> 0)$ implica um aumento na função pelo factor λ^r .

Seja $f(x_1, \dots, x_n)$, definida para todos os $x_1, \dots, x_n$ positivos e seja r um número real positivo. Diz-se que a função $f(\cdot)$ é homogénea de grau r se:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \dots, x_n)$$

para todos os valores positivos de $x_1, \dots, x_n$ e qualquer número positivo λ , ou, em notação simplificada

$$f(\lambda x_i) = \lambda^r f(x_i)$$

Por outras palavras, podemos definir uma função homogénea de grau r , quando ao multiplicarem-se todas as variáveis independentes da função pelo mesmo factor $\lambda (> 0)$ a se obtém um valor idêntico traduzido no produto

da função pelo factor levantado ao expoente r , que é denominado grau da função.

Se a função de produção é homogénea de grau r , então, para quaisquer K , L e λ tem-se:

$$\frac{f(\lambda x_i)}{f(x_i)} = \lambda^r$$

ou seja, o factor (escalar, λ) elevado ao expoente r , λ^r , é igual ao rácio da função, em que as variáveis independentes são multiplicadas pelo escalar λ , pela própria função.

- Dado que quando $\lambda > 1$, tem-se **$\lambda^r > \lambda$** se e só se **$r > 1$** , a função produção, $f(\cdot)$, que é homogénea de grau r , apresentará retornos crescentes à escala.
- Se **$r=1$** a função é homogénea de grau um, tendo **retornos constantes à escala, pelo que $\lambda^r = \lambda$** .
- **Se $r < 1$** a função de produção tem **retornos decrescentes à escala, então, $\lambda^r < \lambda$** . A função de produção apresenta retornos decrescentes à escala se se multiplicar x_1 e x_2 pelo mesmo número λ (> 1) multiplica a produção por menos do que λ .

3.2 - FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COM DOIS FACTORES PRODUTIVOS

Se utilizarmos a função de produção com dois factores produtivos, K e L , temos:

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^r f(K, L)$$

o que significa que se os factores produtivos K e L forem multiplicados pelo parâmetro λ a produção varia pelo factor **λ^r** , então a **função de produção é homogénea de grau r** .

Quando **$r=1$** a função de produção é linearmente homogénea. Em economia muitos modelos assumem a hipótese de que a função de produção é homogénea de grau um ($r=1$), o que significa que duplicando todos os factores produtivos a função de produção duplica também.

Quando $r=0$ a função é homogénea de grau zero, o que traduz que duplicando os factores o valor da função não é alterado.

3.2.1 - EXEMPLO DE FUNÇÕES HOMOGÉNEAS

Exemplo 1

A função

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$$

é homogénea de grau $\frac{1}{2}$ pois, multiplicando x_1 e x_2 por 2 ($\lambda=2$), tem-se:

$$\sqrt{2x_1 + 2x_2} = \sqrt{2} \sqrt{x_1 + x_2} = 2^{1/2} \sqrt{x_1 + x_2}$$

a função tem rendimentos decrescentes à escala, pois $\lambda (=2) > \lambda^r (=2^{1/2})$.

Exemplo 2

Seja a função

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

e multiplicando as variáveis independentes por 2, vem:

$$\sqrt{2(x_1) \cdot 2(x_2)} = 2^1 \sqrt{x_1 x_2} = 2 f(x_1, x_2).$$

esta função é homogénea de grau um pois, multiplicando todos os factores por 2, a função também é multiplicada por dois tendo, por conseguinte, rendimentos constantes à escala.

Exemplo 3

Seja a função

$$f(K, L) = [a\sqrt{K} + b\sqrt{L}]^c$$

em que a, b e c são constantes positivas. Assim, multiplicando as variáveis K e L pelo escalar λ , tem-se:

$$f(\lambda K, \lambda L) = [a\sqrt{\lambda K} + b\sqrt{\lambda L}]^c$$

donde

$$= \lambda^{c/2} [a(\sqrt{\lambda K} + b\sqrt{\lambda L})]^c$$

Portanto, ao multiplicarem-se as variáveis independentes, K e L por λ , a função é multiplicada por $\lambda^{c/2}$. A **função será homogênea de grau $c/2$** , apresentando

- retornos crescentes à escala se $c > 2$;
- retornos constantes à escala se $c = 2$;
- retornos decrescentes à escala se $c < 2$.

EXEMPLO 4

Verificar o grau de homogeneidade da seguinte função homogênea

$$Q(K,L)=K^2-KL+L^2$$

A fim de verificar o grau de homogeneidade da função, multipliquemos os factores de produção, K e L, pelo escalar λ , obtendo-se:

$$\begin{aligned} Q(\lambda K, \lambda L) &= (\lambda K)^2 - (\lambda K)(\lambda L) + (\lambda L)^2 \\ &= \lambda^2 K^2 - \lambda^2 K L + \lambda^2 L^2 \\ &= \lambda^2 (K^2 - K L + L^2) \end{aligned}$$

Donde se tem

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda^2 Q(K,L)$$

Como $r = 2$, a função é homogênea de grau 2.

3.2.2 - TEOREMA DE EULER

O teorema de Euler traduz-se no seguinte: **se uma função é linearmente homogénea de grau r , o produto (*output*) é igual à soma do produto marginal de cada factor vezes o nível de utilização de cada factor.**

No caso geral, o teorema de Euler no que concerne às funções homogéneas refere que, se

$$Q(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

é uma função homogénea de grau r ; então, tem-se a seguinte identidade:

$$x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial Q}{\partial x_3} + \dots + x_n \frac{\partial Q}{\partial x_n} = r Q(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

No caso de apenas dois factores de produção, capital e trabalho, e considerando o preço dos factores produtivos, P , tem-se:

$$PQ = P \frac{\partial Q}{\partial K} K + P \frac{\partial Q}{\partial L} L$$

Ou, dividindo ambos os membros da equação por P , obtém-se a função de produção técnica:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} L = Q(K, L)$$

Esta igualdade mostra que, para funções homogéneas, **existe uma relação bem definida entre os valores da função e os valores das suas primeiras derivadas parciais⁶.**

Então, para a verificação do grau de homogeneidade da função, utilizaremos:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \dots, x_n)$$

ou

⁶ É importante distinguir entre a equação de Euler $\frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} L$, e a seguinte equação

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL$$

sendo esta última a diferenciação total de Q . Note-se que nesta última equação a derivada parcial $\frac{\partial Q}{\partial K}$ é multiplicada por dK e a derivada parcial $\frac{\partial Q}{\partial L}$ é multiplicada por dL , diferentemente do que acontece na equação de Euler.

$$x_1 \frac{\delta Q}{\delta x_1} + x_2 \frac{\delta Q}{\delta x_2} + x_3 \frac{\delta Q}{\delta x_3} + \dots + x_n \frac{\delta Q}{\delta x_n} = r f(x_1, \dots, x_n)$$

onde r é o grau da função homogénea.

Assim, segundo o teorema de Euler, uma função linearmente homogénea pode sempre ser expressa como a soma dos termos, cada um dos quais é o produto de uma variável independente pela derivada parcial de primeira ordem em relação a essa variável.

No caso de uma função de produção com dois factores produtivos, capital, K , e trabalho, L , tem-se:

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^r f(K, L)$$

ou

$$\frac{\delta Q}{\delta K} K + \frac{\delta Q}{\delta L} L = r f(K, L)$$

Exemplo

Considere-se a seguinte função de produção

$$Q(K, L) = K^6 + 2 K L^5 - 5 L^6$$

Derivando parcialmente a função em relação a K e L , tem-se:

$$\frac{\delta Q}{\delta K} = 6 K^5 + 2 L^5$$

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = 10 K L^4 - 30 L^5$$

Donde se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta K} K + \frac{\delta Q}{\delta L} L &= (6 K^5 + 2 L^5) K + (10 K L^4 - 30 L^5) L \\ &= 6 K^6 + 2 K L^5 + 10 K L^5 - 30 L^6 \\ &= 6 K^6 + 12 K L^5 - 30 L^6 \\ &= 6 (K^6 + 2 K L^5 - 5 L^6) \end{aligned}$$

sendo a função homogénea de grau $r = 6$, ou seja

$$\frac{\delta Q}{\delta K} K + \frac{\delta Q}{\delta L} L = r f(k,L)$$

O **teorema de Euler, em termos económicos**, significa que, para retornos constantes à escala ($r=1$), se o factor produtivo é pago pelo seu produto marginal, o produto total será totalmente exaurido pelos pagamentos feitos aos factores produtivos, levando a que **o lucro económico seja nulo**, o que apenas se verificaria em concorrência perfeita, o que não acontece na realidade, pois não existe concorrência perfeita.

No caso de concorrência perfeita o custo total seria igual ao rendimento total, estando a empresa na situação de **break even point** económico (mas podendo existir lucro contabilístico, quando apenas são tomados em conta os **custos explícitos**).

Como a remuneração dos factores de produção da função $Q=f(K,L)$ é dada pelas derivadas parciais da função em relação a cada factor (variável independente), e considerando que a remuneração do factor capital é dada por π e a remuneração do factor trabalho é dada por w , tem-se:

$$\pi = \frac{\delta Y}{\delta K} \quad \text{e} \quad w = \frac{\delta Y}{\delta L}$$

o produto, Q , vem dado por

$$Q = \pi K + w L$$

não havendo, nesta situação, lucro económico, sendo o produto igual aos custos dos factores utilizados, estando-se numa situação de **break-even point**.

Quando se está em **concorrência imperfeita no mercado de factores (existindo poder de mercado)** o pagamento efectuado aos factores produtivos é inferior ao seu produto marginal, pelo que o produto total não é exaurido pelo pagamento efectuado aos factores produtivos, podendo existir lucro económico positivo.

Uma função que é linearmente homogénea não significa, necessariamente, que a função seja linear. A função pode ser generalizada a mais de dois factores produtivos.

3.3 - ELASTICIDADES DA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO EM RELAÇÃO AO CAPITAL, K, E EM RELAÇÃO AO TRABALHO, L. E RENDIMENTOS À ESCALA

Os rendimentos à escala estão relacionados com a elasticidade da função de produção em relação ao factor capital, η_K , e com a elasticidade de função de produção em relação ao factor trabalho, η_L sendo η_K a elasticidade de Q (produto) em relação ao factor capital, K, e η_L a elasticidade de Q (produto) em relação ao factor trabalho, L.

Estas elasticidades respondem às perguntas: Como varia o produto, Q, quando varia o factor capital, *ceteris paribus*; e como varia o produto, Q, quando varia o factor trabalho, *ceteris paribus*?

Seja a função de produção

$$Q = f(K, L)$$

Pelo teorema de Euler tem-se

$$\frac{\delta Q}{\delta K} K + \frac{\delta Q}{\delta L} L = r f(K, L)$$

Dividindo ambos os termos pela função de produção, $f(K, L)$, vem:

$$\frac{\delta Q}{\delta K} \frac{K}{f(K, L)} + \frac{\delta Q}{\delta L} \frac{L}{f(K, L)} = r$$

ou

$$\frac{\delta Q}{\delta K} \frac{K}{Q} + \frac{\delta Q}{\delta L} \frac{L}{Q} = r$$

pois $f(K, L) = Q$.

$\frac{\delta Q}{\delta K} \frac{K}{Q}$ é a elasticidade de Q (produto) em relação a K (capital) e $\frac{\delta Q}{\delta L} \frac{L}{Q}$ é a elasticidade de Q (produto) em relação a L (trabalho), pelo que se tem:

$$\eta_K + \eta_L = r$$

Desta relação retira-se que se:

- $\eta_K + \eta_L > 1$ ($r > 1$) a função de produção tem rendimentos crescentes à escala;

- $\eta_K + \eta_L = 1$ ($r=1$) a função de produção tem rendimentos constantes à escala;
- $\eta_K + \eta_L < 1$ ($r < 1$) a função de produção tem rendimentos decrescentes à escala.

3.4 - FUNÇÃO DE COBB-DOUGLAS

Existe uma função homogénea que é muito utilizada em economia quer como uma função de produção quer como uma função utilidade, desenvolvida inicialmente pelo matemático C.W. Cobb e pelo economista Paul Douglas, em 1928, e que ficou conhecida por função Cobb-Douglas.

Na sua forma geral pode ser expressa do seguinte modo:

$$Q = A, x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}, \dots, x_n^{a_n}$$

Com as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, com expoentes $a_1, a_2, \dots, a_n$ respectivamente, que são normalmente fracções positivas.

Esta função pode ser facilmente transformada usando logaritmos nos dois membros da função como uma função linear das variáveis:

$$\ln Q = \ln A + a_1 \ln x_1 + \dots + a_n \ln x_n$$

A função Cobb-Douglas especifica a tecnologia nos logaritmos das variáveis, facilitando o tratamento econométrico.

A Função de produção Cobb-Douglas tem rendimentos decrescentes, constantes ou crescentes à escala, respectivamente, se a soma dos expoentes for menor, igual ou maior que um.

Normalmente considera-se que a função Cobb-Douglas tem a soma dos expoentes igual a um, pelo que, neste caso, tem rendimentos constantes à escala.

3.4.1 - FUNÇÃO COBB-DOUGLAS COM DOIS FACTORES PRODUTIVOS

Normalmente utiliza-se a função Cobb-Douglas apenas com dois factores produtivos, capital, K, e trabalho, L:

$$Q = A K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

onde

A é uma constante positiva e α é uma fracção positiva. Esta função pode ser generalizada para

$$Q = A K^{\alpha} L^{\beta}$$

onde β é também uma fracção positiva, tal como α , que pode ou não ser igual a $1-\alpha$.

Algumas das características desta função são:

- É homogénea de grau $\alpha+\beta$, pois se multiplicarmos, na função, K e L por δ , e fazendo a substituição na função, tem-se:

$$A (\delta K)^{\alpha} (\delta L)^{1-\alpha} = \delta^{\alpha+\beta} Q$$

- No caso especial de $\alpha+\beta=1$ a função é linearmente homogénea, havendo retornos constantes à escala. A função é homogénea de grau um mas não é uma função linear.

Esta função geral de Cobb-Douglas exhibe rendimentos constantes à escala, crescentes à escala ou decrescentes à escala conforme a soma dos seus expoentes for igual, maior ou menor que 1, ou seja:

- Rendimentos constantes à escala se $\alpha+\beta=1$;
- Rendimentos crescentes à escala se $\alpha+\beta>1$;
- Rendimentos decrescentes à escala se $\alpha+\beta<1$;

Os expoentes α e β são as elasticidades parciais do produto em relação ao capital e ao trabalho, respectivamente.

3.4.2 - PROGRESSO TÉCNICO NEUTRAL E NÃO-NEUTRAL E AS CONTRIBUIÇÕES DA NEUROECONOMIA. TIPOS DE *STRESS* E PRODUTIVIDADE

Todos os métodos de produção são dinâmicos e tendem a integrar os progressos técnicos, incluindo as técnicas de gestão, com efeitos na estrutura das empresas, nomeadamente nos custos de produção. **A melhor afectação dos**

recursos, nomeadamente o factor força de trabalho, permitirá uma maior eficiência e, por conseguinte, um aumento da produtividade.

A **redução de conflitos na empresa** e o aumento da **confiança** pode traduzir-se também num aumento da produtividade. Com efeito, desenvolvimentos no âmbito da neuroeconomia evidenciaram que, quando o nível de confiança é baixo, as pessoas focam a sua energia na sua própria protecção e sobrevivência, sendo o medo, nestes casos, a principal motivação, o que leva a que os indivíduos se centrem menos na inovação e excelência do seu trabalho, reduzindo a produtividade.

De acordo com estes estudos, os **recursos mentais que são escassos**, são mais utilizados na vigilância, segurança própria e sobrevivência. (Zak, Paul J. ; Amos Nadler, 2010; Samanez et al:2008). **Daí que os administradores e gestores, devam ter como uma das suas tarefas nucleares a inclusão dos indivíduos pertencentes aos vários grupos de interesses, por vezes divergentes, existentes na empresa.**

O objectivo não é afastar o **stress** de uma organização, mas sim mantê-lo em um nível óptimo. **Em termos de produtividade, níveis de stress muito baixos ou muito elevados são prejudiciais em termos de produtividade.**

Segundo Zak, Nadler, 2010, existem, em geral, **dois tipos de stress** que afectam a *performance* de uma empresa, que são denominados por **stress Tipo I e stress Tipo II.**

O **stress Tipo I** é caracterizado pela existência de medo crónico, ocorrendo quando os dirigentes exigem perfeição, levando a uma diminuição de pensamento claro, podendo levar a uma elevação da morbilidade com efeitos negativos para o indivíduo e para a empresa. (Zak, Nadler, 2010:71).

Por seu lado, o **stress Tipo II** está associado com a motivação e elevada energia, sendo episódico, não sistemático, estando relacionado com a realização de determinadas tarefas, o que acontece quando se tem *dead lines* ou se está numa situação de criatividade e motivação, levando a comportamentos colaborativos. (Zak, Nadler, 2010:71).

Uma melhor organização do processo produtivo permite às empresas produzir mais com o mesmo nível de factores produtivos aumentando, deste modo, a produtividade.

O progresso técnico representa uma alteração da função de produção, permitindo às empresas produzir o mesmo nível de produto com menos quantidade de factores produtivos.

Ao longo do tempo tem sido verificado que a taxa de crescimento do produto tem excedido a taxa de crescimento que pode ser atribuída aos factores produtivos *per se*.

PROGRESSO TÉCNICO NEUTRAL - Se considerarmos a função de produção de Cobb-Douglas, e introduzirmos a variável tempo, t , podemos reescrevê-la do seguinte modo:

$$Q = A(t) f(K L)$$

O termo A , que é função do tempo, representa todas as influências na função de produção, Q , para além dos factores produtivos, no caso, trabalho, L , e capital, K . Isto é, o produto pode crescer ao longo do tempo para uma dada combinação dos factores produtivos, que é denominado por progresso técnico neutral, no sentido de não serem alteradas as combinações dos factores produtivos. Por exemplo, se uma empresa tem vindo a produzir um determinado nível de produção $Q = f(K, L)$ e em determinado ano produz

$$Q^* = 1,1 f(K, L)$$

devido a inovações introduzidas (*ceteris paribus*), houve progresso técnico neutral dado que se manteve a proporção da combinação de factores produtivos. O progresso técnico representa uma mudança na função de produção que, como antes referimos, pode consubstanciar-se em medidas de gestão de *inclusão* e diminuição do *stress* Tipo I.

PROGRESSO TÉCNICO NÃO NEUTRAL - Contudo, pode haver progresso técnico (inovações) que alteram a combinação dos factores produtivos sendo, portanto, progresso técnico não neutral, ou seja, o progresso técnico introduzido altera as proporções da combinação dos factores produzidos levando, na maior

parte dos casos, à diminuição da quantidade do factor trabalho utilizado, elevando-se, deste modo, a produtividade média do trabalho.

É importante relembrar que o progresso técnico numa empresa pode verificar-se de forma mais ou menos contínua. Tal verifica-se quando uma máquina antiga é substituída por outra que permite uma maior produtividade do factor trabalho; verifica-se também quando os trabalhadores adquirem mais formação (aumentam o seu capital humano).

Mudanças em A , ao longo do tempo, representam progresso técnico que, em média, implica que essas mudanças têm um efeito positivo na produção, pelo que se pode considerar que $\frac{dA}{dt} > 0$, ou seja, a derivada de A em relação ao tempo é positiva, implicando que com o progresso técnico, neutral e não-neutral, a produtividade marginal do trabalho e do capital aumentam.

Importa sublinhar que a inovação, em geral, tem a sua fonte na investigação, daí a importância da investigação e do conhecimento científico para o desenvolvimento de uma comunidade. A aplicação de práticas rotineiras por uma empresa levará a mesma a sair do mercado, num prazo mais ou menos longo, dado que não acompanha o desenvolvimento que é, intrinsecamente, dinâmico.

3.4.3 - FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA. PROGRESSO TÉCNICO E ELASTICIDADE DO PRODUTO EM RELAÇÃO AOS FACTORES PRODUTIVOS

Considerando a função de produção

$$Q = A(t) f(K, L)$$

e fazendo a sua diferenciação em relação ao tempo, tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dA}{dt} f(K, L) + A \cdot \frac{df(K, L)}{dt}$$

Da equação inicial retira-se que:

$$f(K, L) = Q/A,$$

e que

$$A = Q/f(K, L).$$

Assim, fazendo as substituições, tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{Q}{A} + \frac{Q}{f(K,L)} \left[f_K \frac{dK}{dt} + f_L \frac{dL}{dt} \right]$$

Dividindo esta equação por Q, tem-se

$$\frac{dQ/dt}{Q} = \frac{dA/dt}{A} + f_K \frac{K}{f(K,L)} \cdot \frac{dK/dt}{K} + f_L \cdot \frac{L}{f(K,L)} \frac{dL/dt}{L}$$

tendo-se multiplicado e dividido os segundo e terceiro termos do segundo membro da última equação, respectivamente, por K e por L, obteve-se $\frac{dK/dt}{K}$ e $\frac{dL/dt}{L}$ que representam a taxa proporcional de crescimento de K e L por unidade de tempo.

Podemos observar que a taxa de crescimento do produto é função da taxa de crescimento do progresso técnico e da taxa de crescimento dos factores produtivos. Se designarmos por:

- $T_Q = \frac{dQ/dt}{Q}$ =- a taxa de crescimento do produto;
- $T_A = \frac{dA/dt}{A}$ = a taxa de crescimento do progresso técnico;
- $T_K = \frac{dK/dt}{K}$ = a taxa de crescimento do capital e
- $T_L = \frac{dL/dt}{L}$ =- a taxa de crescimento do trabalho

podemos expressar a equação anterior da seguinte forma:

$$T_Q = T_A + f_K \frac{K}{f(K,L)} \cdot T_K + f_L \cdot \frac{L}{f(K,L)} T_L$$

Mudanças no progresso técnico e melhorias nos factores capital e trabalho têm efeitos positivos no produto.

A partir da última equação podemos ainda considerar a elasticidade do produto em relação aos factores de produção, K e L,:

- A elasticidade do produto, Q, em relação ao capital será:

$$\eta_{Q,K} = f_K \frac{K}{f(K,L)} = \frac{\delta Q}{\delta K} \cdot \frac{K}{Q}$$

- A elasticidade do produto, Q, em relação ao trabalho é dada por

$$\eta_{Q,L} = f_K \frac{L}{f(k,L)} = \frac{\delta Q}{\delta K} \cdot \frac{L}{Q}$$

Com estes resultados podemos escrever a seguinte equação:

$$T_Q = T_A + \eta_{Q,K} T_K + \eta_{Q,L} T_L$$

A taxa de crescimento do produto depende da taxa de crescimento do progresso técnico e da taxa de crescimento dos factores de produção e também das elasticidades do produto em relação aos factores produtivos.

CAPITAL HUMANO

É entendido que a procura de trabalho, por parte das empresas, depende da produtividade marginal dos trabalhadores. Diferenças na produtividade tendem a levar a diferenças nos salários.

O principal factor que leva a diferenças na produtividade é o nível de capital humano, que é consubstanciado nas capacidades intelectuais (conhecimento) e físicas que podem ser utilizadas no processo produtivo, e que é obtido ao longo da vida através da educação formal e não formal, do desenvolvimento de aptidões e experiências.

O investimento no capital humano é o factor mais determinante do desenvolvimento económico e social, pois o investimento em capital humano é permanente, diferentemente do investimento em capital físico.

IV

LUCRO E CUSTOS

4.1 - CONCEITO DE LUCRO

Mas o que é o lucro? Os lucros que as empresas realizam advêm de obterem maiores proveitos das suas vendas relativamente aos custos em que incorrem no processo produtivo. O lucro total (π) de uma empresa é a diferença entre o total das receitas⁷ (RT) das suas vendas e os seus custos totais (CT).

$$\pi = RT - CT$$

4.2. CUSTOS E LUCRO

⁷ Embora haja diferenças entre os conceitos de receitas e proveitos, vamos utilizar as duas palavras neste texto como sinónimos.

Na economia neoclássica o principal pressuposto quanto às empresas é que a motivação para as decisões é a maximização do lucro, embora se aceitando que podem existir outras motivações. Para entender o lucro como uma força motivadora para os negócios importa distinguir entre o modo como são medidos os custos em termos económicos e em termos contabilísticos.

4.2.1 - CUSTO DE OPORTUNIDADE E CUSTOS EXPLÍCITOS E IMPLÍCITOS

Em economia definem-se os custos de oportunidade como a soma dos custos implícitos com os custos explícitos.

Custo de oportunidade é o valor da melhor alternativa sacrificada pela opção feita na utilização do bem.

OS CUSTOS EXPLÍCITOS são consubstanciados nos pagamentos efectuados a terceiros pela obtenção de recursos (*inputs*) – matérias-primas, salários, rendas, equipamentos e outros bens e serviços – necessários ao processo produtivo, durante um determinado período. Estes recursos são exteriores à empresa (pessoa colectiva – sociedades ou outras entidades como por exemplo cooperativas) e deverão ser pagos, cujos pagamentos se consubstanciam em custos explícitos.

CUSTOS IMPLÍCITOS OU CUSTOS SOMBRA- As empresas além dos custos explícitos incorrem noutros custos, que resultam de se utilizarem certos factores produtivos no processo produtivo que são propriedade da própria empresa, em determinadas ocupações, que também podemos denominar como *CUSTOS OU PREÇOS SOMBRA*.

Os custos implícitos, para uma empresa, traduzem-se nos proveitos sacrificados pela opção feita, que a empresa poderia obter no melhor emprego alternativo desses recursos. O valor destes factores produtivos ou recursos pertencentes à empresa deverão ser imputados pelo valor da melhor alternativa da sua utilização, expressando o custo de oportunidade.

Como exemplos de custos implícitos incluem-se o valor do trabalho não pago do empresário bem como o valor de todos os outros recursos usados no processo produtivo mas não comprados num dado período, constituindo *custos sombra*.

Os indivíduos suportam custos *sombra* ou implícitos, em quase todas as situações da vida, entre as quais se pode mencionar a espera para tratamento de doenças, como a espera nos consultórios que, para além do tempo, como recurso fundamental, implica também um custo psicológico traduzido na ansiedade. Estes custos individuais repercutem-se também nas empresas, pois o tempo de espera de tratamento de trabalhadores constitui um custo implícito para a empresa.

Sempre que em economia se refere o conceito de custo, tem-se em consideração os custos implícitos e os custos explícitos, ou seja, o custo económico, salvo se outra coisa for referida.

4.2.2 - OS CUSTOS DE CAPITAL

Uma questão importante é a determinação do custo de oportunidade do capital, tal como a terra, equipamento, edifícios. Por definição, o capital é um bem durável, cuja utilidade do mesmo é retirada ao longo de vários períodos de tempo (normalmente mais de um ano). Quanto à avaliação do custo de oportunidade do capital surgem duas questões fundamentais:

- a) A primeira está relacionada do modo como afectar o custo inicial da compra ao longo do tempo.
- b) A segunda prende-se com o que se deve fazer se o valor do capital variar ao longo do tempo.

4.2.2.1 - AFECTAÇÃO DOS CUSTOS DE CAPITAL AO LONGO DO TEMPO

Os bens de capital podem ser arrendados ou alugados (conforme sejam imóveis ou móveis, respectivamente) ou comprados. No caso de a empresa arrendar ou alugar o bem de capital, pagará uma renda periódica pelo uso do bem, sendo o seu custo de oportunidade consubstanciado pelo pagamento dessa renda, o qual é um custo explícito. Esta renda poderá ser ajustada ao longo do tempo,

dependendo das condições e circunstâncias do mercado que se reflectirão no valor do bem e, eventualmente, no valor da renda paga.

No caso de a empresa adquirir o bem de capital, comprando-o, duas possibilidades existem:

- o custo da compra do bem é registado todo de uma vez (o que não é normal) no período temporal da compra ou
- são efectuadas amortizações do custo ao longo de vários períodos (normalmente um ano ou uma fracção do ano) coincidentes com a vida útil do bem, o que é efectuado normalmente na contabilidade da empresa, obedecendo as amortizações a regras estabelecidas pelo Estado.

Em termos económicos, as amortizações do bem de capital serão efectuadas com base no seu custo de oportunidade *em cada momento* (ou período), que traduz o montante que a empresa poderá obter de terceiros se estes utilizassem o bem pertencente à empresa.

Por exemplo, se a empresa tem a propriedade de um imóvel, o custo de oportunidade da utilização deste bem de capital será a renda que, em cada período temporal, a empresa obteria se arrendasse o imóvel. Como a renda poderá variar ao longo do tempo, conforme a variação do valor do bem, de acordo com as condições de mercado, implica que o custo de oportunidade variará em consequência.

4.2.2.2 - CUSTO DE OPORTUNIDADE E CUSTOS HISTÓRICO (*SUNK COST*) E ACTUAL

A taxa da renda do bem de capital pode variar ao longo do tempo em virtude da diminuição ou aumento do valor do bem mas também devido a alterações da oferta e procura no mercado desse bem. Assim, um bem de capital pode valer mais ou menos do que quando foi comprado.

Em cada período deverá ser avaliado o custo de oportunidade corrente (actual) da utilização do bem de capital, independentemente do custo de compra do mesmo (custo histórico). O custo de oportunidade de um bem de capital para a empresa pode ser maior ou menor do que o montante que a empresa pagou por esse bem.

No caso de a empresa ter comprado um bem de capital que não tem qualquer emprego alternativo num determinado período, o uso desse bem tem um custo de oportunidade corrente nulo (dado que o custo de oportunidade é o valor da melhor alternativa no emprego desse bem) e nesta situação não tem uso alternativo.

O custo da compra desse bem é um custo histórico ou custo afundado (*sunk cost*), constituindo um custo que não pode ser recuperado, que não deverá ser tido em consideração na determinação do custo de oportunidade. Em conclusão, os *sunk costs* não devem influenciar a avaliação do custo de oportunidade corrente ou actual. No curto prazo podem existir custos fixos que são *sunk costs*, quando os custos fixos não são recuperáveis.

EFEITO DOS CUSTOS HISTÓRICOS AFUNDADOS (SUNK COSTS EFFECT)

Com base no princípio da racionalidade os custos históricos afundados (*sunk costs*) não deveriam influenciar as decisões quer ao nível das empresas quer ao nível pessoal quer ao nível político.

Para além dos casos de *sunk costs* relacionados com o custo de oportunidade corrente das empresas, os indivíduos enfrentam custos sombra históricos afundados (*shadow sunk costs*) em muitas situações da vida, nomeadamente, no âmbito profissional e no âmbito das relações pessoais. Quantas vezes as pessoas, perante a alternativa de terminar ou não uma relação que actualmente tem elevados custos sombra, que diminui a utilidade ou felicidade, mantêm essa relação porque *investiram* muito nessa relação. Claro que a decisão de a continuar causa muita desutilidade. Contudo, continuam o que indica que os *sunk costs* influenciam as decisões, quer ao nível das empresas quer ao nível pessoal bem como ao nível político.

O axioma da racionalidade da teoria económica tradicional diz que as decisões devem ser tomadas com base nos custos e benefícios esperados decorrentes da escolha de cada opção. Contudo os *sunk costs* influenciam as decisões,

quer ao nível das empresas quer ao nível pessoal, o que contraria a teoria neoclássica⁸.

Esta influência dos *sunk costs* nas decisões das pessoas, contrariamente ao que é pressuposto pela teoria tradicional, é denominado por *efeito dos custos históricos afundados*. (*sunk costs effect*). Este efeito é uma violação do princípio da racionalidade da teoria económica neoclássica, é uma actuação sistemática e natural dos indivíduos. O comportamento natural dos indivíduos reais não condiz com o pressuposto do indivíduo ideal, traduzido no conceito de *homo economicus*, actuando como os átomos da física de Newton.

4.2.2.3 - CUSTO ECONÓMICO TOTAL

O custo económico é o somatório dos custos explícitos e dos custos implícitos. O custo envolvido no uso de qualquer recurso no processo produtivo de uma empresa - quer a empresa tenha um direito de propriedade sobre o mesmo recurso (custo implícito) ou seja comprado no mercado (custo explícito) - é igual ao valor que o mesmo recurso poderia obter na sua melhor alternativa, o que traduz a *teoria dos custos de oportunidade*, ou seja, o custo económico de qualquer factor produtivo é a remuneração que o mesmo receberia na utilização da sua melhor alternativa.

4.2.2.4 - CUSTO CONTABILÍSTICO

O custo contabilístico traduz-se nos custos explícitos. Nestes custos explícitos integram-se as amortizações e depreciações⁹, pois constituem custos explícitos que anteriormente foram pagos pelos bens de capital, constituindo as amortizações e depreciações a mensuração do desgaste efectuado no processo produtivo de um bem cuja utilidade se vai obtendo em vários períodos. As amortizações correspondem ao capital constante cujo valor se integra no valor

⁸ Thaler, Richard H. (2000b: 276). Toward a positive theory of consumer choice, as reprinted in Choices, Values, and Frames, ed. by Daniel Kahneman and Amos Tversky. Cambridge, U.K. Cambridge University Press, 2000, pp. 269–287.

⁹ Alguns autores consideram as amortizações e depreciações como custos implícitos.

total do bem produzido num determinado período, não criam valor mas apenas transmitem valor.

Muitas empresas ao considerarem apenas os custos explícitos e ao não considerarem o valor da melhor utilização dos recursos que são sua propriedade (custos implícitos) podem apresentar um lucro contabilístico positivo mas, em termos económicos, podem sofrer um prejuízo, quando os custos implícitos forem superiores ao *lucro* contabilístico.

4.2.2.5 - LUCROS NORMAIS COMO PARTE DO CUSTO ECONÓMICO

A compensação mínima para manter o empresário na empresa constitui o lucro normal e é considerado como um custo implícito, integrando o custo de oportunidade. Os salários implícitos dos empresários e as rendas implícitas são constitutivos do lucro normal, por conseguinte são custos implícitos.

O lucro normal é o mínimo lucro necessário para manter a empresa em actividade. Uma empresa que tem *lucro normal* tem um rendimento total igual ao custo de oportunidade total, significando que o lucro económico é nulo. O lucro económico nulo indica que a empresa recebe exactamente a taxa normal de lucro ou a taxa de retorno do mercado pelos investimentos efectuados, ou seja, recebe o que obteria na melhor alternativa em qualquer parte.

4.2.2.6 - LUCRO ECONÓMICO E LUCRO CONTABILÍSTICO

Numa empresa deve distinguir-se entre *lucro contabilístico* e *lucro económico*. Pela análise feita conclui-se que o termo “lucros” pode ter significados diferentes.

LUCRO CONTABILÍSTICO traduz-se na diferença entre o proveito ou rendimento total e os custos explícitos. O conceito de lucro contabilístico é normalmente utilizado para fins diferentes do conceito de lucro económico, nomeadamente para controlar fraudes e apurar os impostos sobre o rendimento. A não consideração dos custos traduzidos pelos valores das melhores alternativas dos bens que são propriedade das empresas (sociedades ou outras pessoas colectivas) – custos implícitos - leva a que os lucros contabilísticos sejam maiores que os lucros económicos ou os prejuízos sejam menores.

O LUCRO ECONÓMICO (π_e) é igual ao total dos proveitos menos todos os custos (explícitos e implícitos, estes últimos incluindo o lucro normal):

LUCRO ECONÓMICO = π_e = Proveitos totais – (Custos explícitos + Custos implícitos)

O lucro económico apenas será positivo se o rendimento da empresa incluir o custo de oportunidade de todos os recursos utilizados, incluindo o custo de oportunidade de todos os activos possuídos pela empresa.

As expectativas de lucros económicos positivos encorajam a tomada de riscos que está associada ao investimento, nomeadamente à inovação, o que tem grande influência na produtividade, contribuindo para o desenvolvimento económico. Por outro lado leva a que os factores produtivos se orientem para os sectores mais eficientes.

Pode acontecer que em termos contabilísticos seja apurado lucro quando o lucro económico é negativo, ou seja, existe um prejuízo em determinado período temporal em termos económicos mas existe um lucro contabilístico devido a não serem tidos em consideração os custos implícitos. Os impostos são pagos com base no lucro contabilístico.

Por exemplo, um contabilista pode apresentar um rendimento (proveito) de 96000€ e custos de 64000€, pelo que o lucro contabilístico é de 32000€. Contudo, se o proprietário da empresa pudesse arrendar o edifício, que pertence à empresa, por 42000€, e não havendo outros custos a considerar, o lucro económico da empresa seria negativo: 96000€–64000€ – 42000€ =–6000€, ou seja, a empresa teria tido um prejuízo económico de – 6000€.

O conceito de lucro contabilístico exclui algumas importantes componentes do custo das empresas. Quando o custo é mal calculado também o é o lucro que é a receita total menos o custo. Muitas decisões económicas podem ser negativas em virtude de os custos serem mal calculados. A ideia central para compreender o conceito de lucro económico é relembrar sempre a ideia de custo de oportunidade que se consubstancia no valor da melhor alternativa sacrificada pelo recurso possuído quando o mesmo é utilizado e que, como já foi referido, pode ser explícito ou implícito.

Dado que as decisões de investir e manter a empresa em actividade são baseadas no lucro económico e não no lucro contabilístico, a palavra *lucro* neste texto significa sempre lucro económico, salvo se for referido algo diverso.

4.2.2.7 - CUSTOS DE PRODUÇÃO NO CURTO PRAZO

O objectivo da maximização do lucro implica que as empresas, para cada nível de produção, visem a minimização dos custos. Já analisamos os conceitos de custo de oportunidade, de custos explícitos e custos implícitos, custos económicos e custos contabilísticos.

Introduzimos agora a noção de custos sociais que está relacionada com as externalidades negativas.

CUSTOS SOCIAIS E EXTERNALIDADES - Os sujeitos económicos, indivíduos e empresas, têm comportamentos e desenvolvem acções que geram custos e benefícios. De acordo com o princípio da racionalidade, normalmente, procuram maximizar os benefícios e minimizar os custos (monetários e não monetários). Os custos totais gerados pelas acções dos sujeitos económicos são designados por CUSTOS SOCIAIS.

Das acções dos sujeitos económicos, muitas vezes, nem todos os benefícios e custos gerados recaem na esfera jurídica desses sujeitos, o que significa que parte dos mesmos benefícios são obtidos por terceiros e parte dos custos são também suportados por outros que não os que desenvolveram as acções.

EXTERNALIDADES OU CUSTOS E BENEFÍCIOS EXTERNOS – Externalidades são os efeitos (custos ou benefícios) resultantes de acções de um sujeito económico e experienciados por terceiros. As externalidades podem ser positivas ou negativas.

EXTERNALIDADES NEGATIVAS E CUSTOS SOMBRA

As externalidades são negativas quando os efeitos das acções de um sujeito económico (indivíduo ou empresa) se traduzem em custos de qualquer natureza suportados por terceiros, custos que podem ser patrimoniais ou não patrimoniais. As externalidades negativas ou custos externos integram os custos

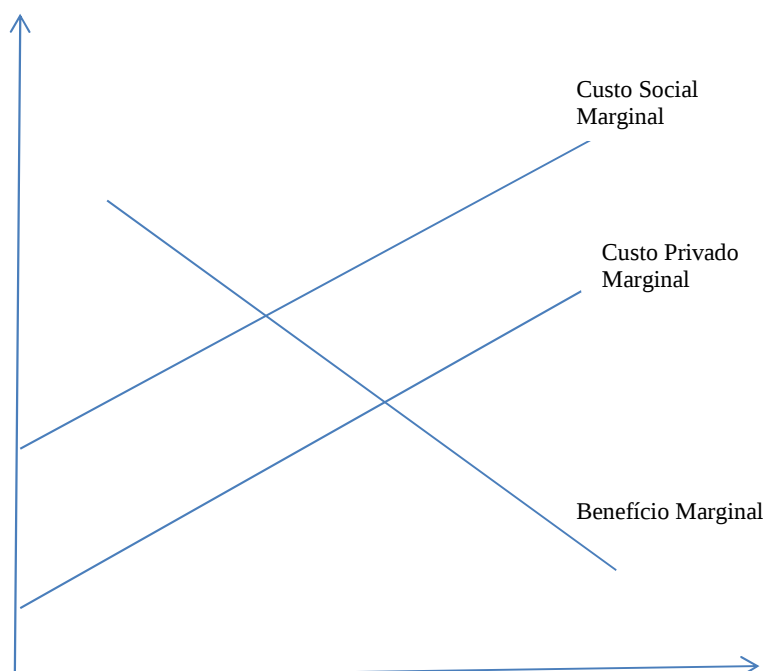
sociais. Como exemplos de externalidades negativas podem citar-se a poluição, ruído. Também constituem externalidades negativas os custos não patrimoniais consubstanciados em sofrimento psicológico, que denominamos como *custos sombra*.

EXTERNALIDADES POSITIVAS - Externalidades positivas traduzem-se nos benefícios recebidos por terceiros devidos a acções ou comportamentos de outrem. Por exemplo a vacinação de parte da população contra doenças infecciosas contagiosas é uma externalidade positiva. A educação tem também benefícios sociais externos, sendo outro exemplo de uma externalidade positiva.

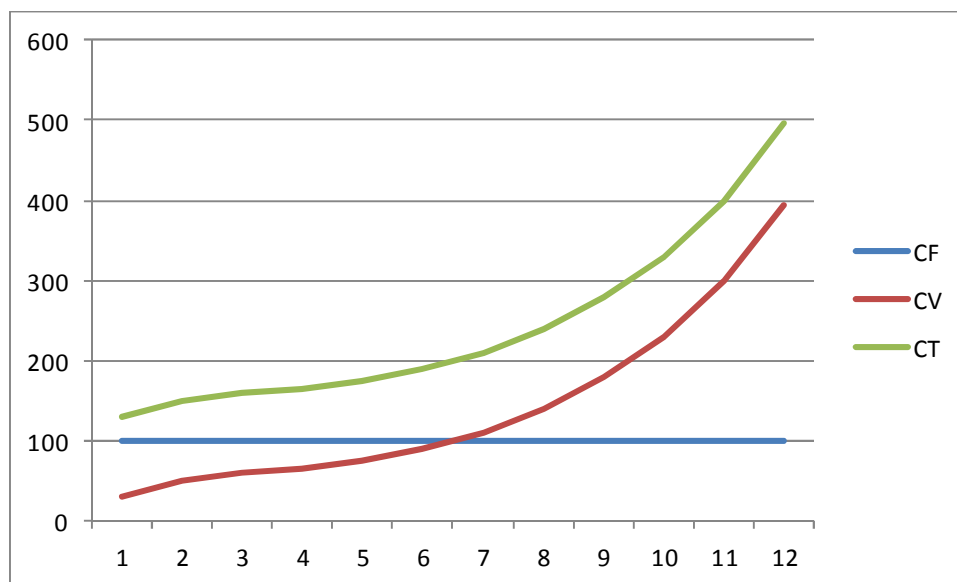
CUSTO SOCIAL – O custo social é o somatório de todos os custos que a sociedade tem de suportar decorrentes de qualquer acção praticada por indivíduos ou empresas, integrando os custos privados (suportados por quem desenvolve uma actividade) e os custos externos ou externalidades negativas. Atendendo aos direitos de propriedade sobre os bens, e considerando que os indivíduos visam maximizar a utilidade e as empresas o lucro,

$$\text{Custo Social (CS)} = \text{Custo privado (CP)} + \text{externalidades (EXT)}$$

$$CS = CP + EX$$



CUSTOS NO CURTO PRAZO



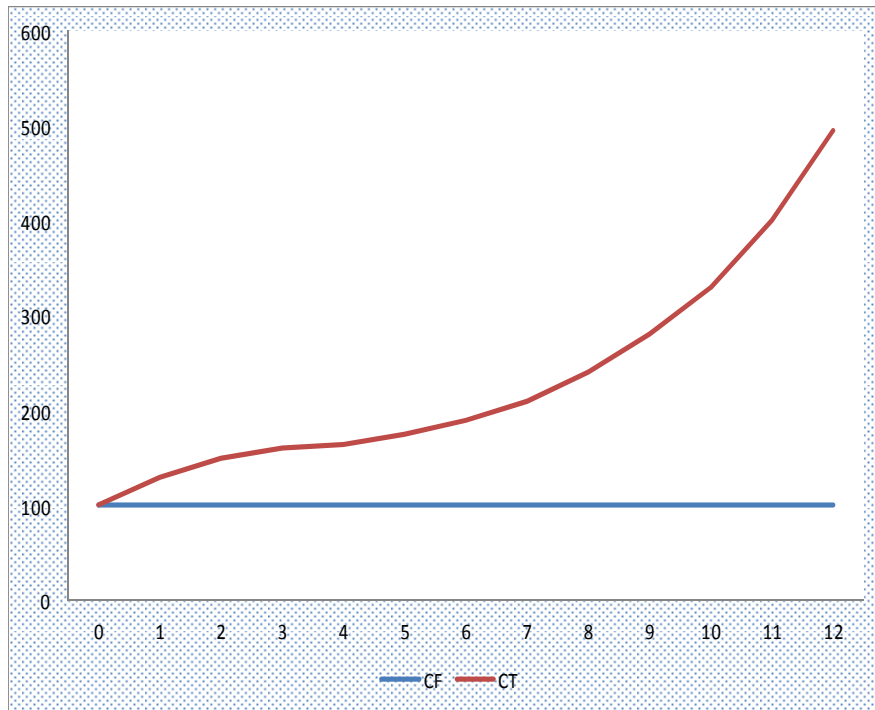
CUSTOS TOTAIS A CURTO PRAZO. CUSTO TOTAL, CUSTO VARIÁVEL TOTAL E CUSTO FIXO

A função de custo total a curto prazo é composta de uma parcela de custos fixos e outra de custos variáveis que dependem do nível de produção, que poderá ser representada pela seguinte expressão

$$CT = f(x) + CF$$

ou

$$CT = CV + CF$$



Considere-se que a função de custo total de curto prazo é dada pela seguinte equação cúbica:

$$CT = a x^3 - b x^2 + c x + B$$

CT e x são variáveis e a, b, c e B são parâmetros (sendo B igual ao custo fixo). Como a função de custo variável depende da quantidade produzida x_i , a equação da função de custo variável não terá os custos fixos e será dada por:

$$CV = a x^3 - b x^2 + c x$$

É fácil verificar que quando a empresa nada produz, i. é, quando $x=0$, o CT será

$$CT = a 0^3 - b 0^2 + c 0 + B \therefore CT = CF = B$$

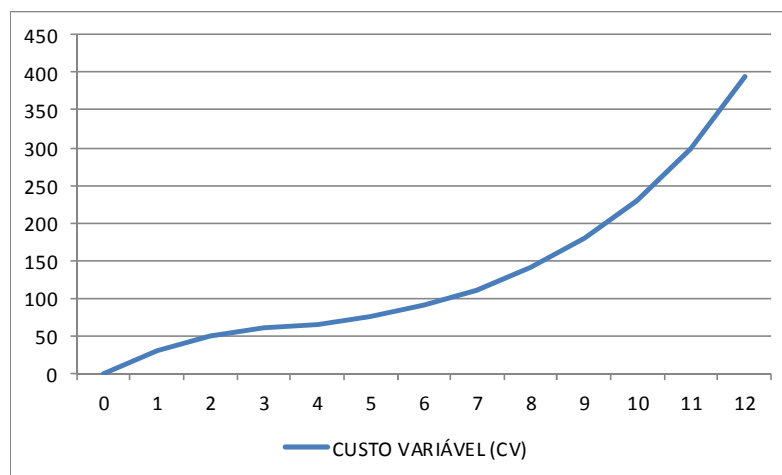
ou seja, quando a produção é zero, o custo total da empresa é igual ao custo fixo. Graficamente, o custo fixo total (CF) pode ser representado por uma linha horizontal, como no gráfico XXX. O custo total (CT) parte do mesmo ponto da curva do CF (dado que o CT tem de ser pelo menos igual ao CF) e cresce desde esse ponto. A distância vertical entre a curva do CF e a curva do CT mostra o custo variável total para cada nível de produção.

A curva de custo variável parte da origem dos eixos, como vemos no Gráfico.

uma vez que, quando $x = 0$, teremos que quando $x=0$ tem-se:

$$CV = a 0^3 - b 0^2 + c 0 = 0 \therefore CV = 0$$

e, para qualquer $x > 0$, teremos $CV > 0$.



Inicialmente o CV cresce mas a uma taxa decrescente traduzindo a evolução do custo marginal que, por sua vez, decresce inicialmente e, a partir de certo ponto, começa a crescer devido à *lei dos rendimentos marginais finalmente decrescentes*. Podemos observar que a curva de CV é, num primeiro segmento côncava em relação à origem (quando existem rendimentos marginais crescentes, logo, custos marginais crescentes) e, depois de um ponto de inflexão, torna-se convexa em relação à origem.

Q	CF	CV	CT	Cmg	CFM	CVM	CTM
1	100	30	130	30	100.00	\$30.00	130.00
2	100	50	150	20	50.00	25.00	75.00
3	100	60	160	10	33.33	20.00	53.33
4	100	65	165	5	25.00	16.25	41.25
5	100	75	175	10	20.00	15.00	35.00
6	100	90	190	15	16.67	15.00	31.67
7	100	110	210	20	14.29	15.71	30.00
8	100	140	240	30	12.50	17.50	30.00
9	100	180	280	40	11.11	20.00	31.11
10	100	230	330	50	10.00	23.00	33.00
11	100	300	400	70	9.09	27.27	36.36
12	100	395	495	95	8.33	32.92	41.25

CUSTOS MÉDIOS E MARGINAIS NO CURTO PRAZO

Uma questão central é como determinar o nível de produção que maximize o lucro da empresa. Embora os custos fixos, os custos variáveis e custos totais sejam importantes medidas, não são, contudo, muito úteis na determinação o produto que maximiza o lucro ou minimiza as perdas.

Outras medidas são de maior utilidade para estimar os lucros ou perdas, que são as seguintes:

- Custo marginal (Cmg)
- Custo fixo médio (CM)
- Custo variável médio (CVM)
- Custo médio total. (CMT)

Estes quatro tipos de custos constituem a estrutura de custos da empresa, que podem ser visualizados num gráfico. A estrutura de custos da empresa é o modo como os vários custos varia com o nível de produto.

CUSTO MARGINAL

O custo marginal (Cmg) é o custo adicional de produzir mais uma unidade de produto, podendo também ser definido como a variação do custo total (c). Dado que a variação do custo total apenas é devida a variações no custo variável (CV), então o custo marginal pode também ser definido como a variação do custo variável por unidade produzida.

$$Cmg = \frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{\Delta CV}{\Delta x}$$

Em termos diferenciais o Cmg, é expresso pela derivada do custo total (C) em relação a x (quantidade produzida), ou seja:

$$\frac{dC}{dx}$$

Assim, se tivermos a função de custo total

$$C = a x^3 - b x^2 + c x + B$$

O custo Cmg é dado por:

$$Cmg = \frac{dC}{dx} = (CT)' = 3 a x^2 - 2 b x + c$$

obtendo-se o mesmo resultado derivando a função de CV.

Encontra-se o custo médio unitário a curto prazo (CM), o custo variável médio (CVM) e o custo fixo médio (CFM), dividindo-se pela quantidade x do produto, respectivamente, C, CV e CF. A função de CM será:

$$CM = \frac{C}{x} \therefore CM = \frac{CV+CF}{x} = \frac{CV}{x} + \frac{CF}{x} = CVM + CFM$$

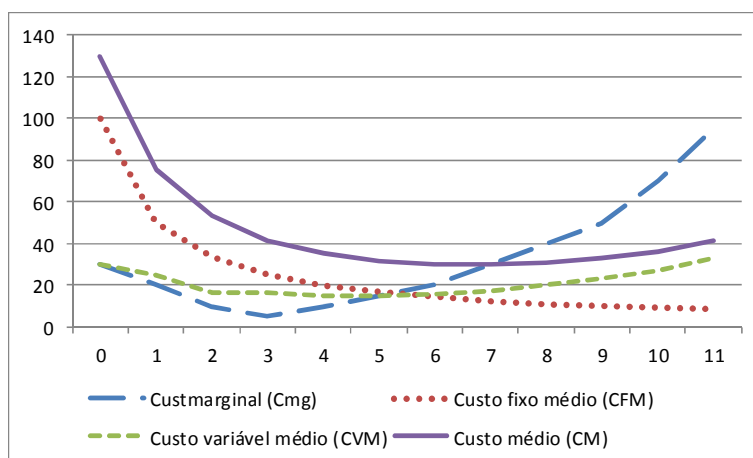
Sendo a função de custo total dada por

$$C = a x^3 - b x^2 + c x + B$$

A função de custo médio é dada por

$$CM = \frac{C}{x} = a x^2 - b x + c + \frac{B}{x}$$

No gráfico seguinte podem observar-se os custos médios e marginal:



Repare-se que o CFM é decrescente com a produção, pois o CF é dividido por maiores quantidades de produto, aproximando-se, mas nunca tocando, o eixo das abcissas.

A curva do CVM é, matematicamente, relacionado com a curva do custo marginal. A curva de Cmg intersecta a curva de CVM no seu ponto mínimo.

Quando a curva de CM é decrescente, a curva de Cmg está abaixo da curva de CM, o que implica que a curva de custo médio é decrescente enquanto a curva de Cmg for inferior.

O Cmg é igual ao CM quando este é mínimo. Vejamos:

$CM = \frac{C}{x}$ o que implica que

$$C = CM \cdot x.$$

Derivando esta última expressão em relação a x, tem-se:

$$\frac{dC}{dx} = CM + x \cdot \frac{dCM}{dx}$$

Como $\frac{dC}{dx}$ e $\frac{dCM}{dx}$ são duas expressões para o custo marginal. A forma da curva do custo marginal é o reflexo e a consequência da *lei dos rendimentos marginais finalmente decrescentes*, ou seja, é crescente no início e, a partir de certo ponto é decrescente. A curva do custo marginal tem a forma de U. O segmento decrescente da curva dos custos marginais reflecte rendimentos marginais

crescentes. O segmento crescente dos custos marginais reflecte rendimentos marginais decrescentes.

Se o custo marginal for menor do que o custo médio ($C_{mg} < CM$) este tende a diminuir. Pelo contrário, se o custo marginal for maior do que o custo médio ($C_{mg} > CM$) então o custo médio subirá. O mesmo raciocínio aplica-se ao custo variável médio.

A figura mostra como o custo marginal e o custo variável médio estão relacionados. Enquanto a curva de custo marginal (CM) se encontra abaixo da curva de custo variável médio, esta será decrescente. Quando a curva de C_{mg} iguala a curva de custo variável médio (CVM) esta atinge o seu mínimo.

Do mesmo modo enquanto a curva de C_{mg} for inferior à curva de CM esta vai decrescendo. Quando a curva de C_{mg} iguala a curva de CM esta atinge o seu mínimo, passando a ser crescente a partir deste ponto.

A curva de custos médios é a soma da curva de CVM com a curva de custos fixos médios (CFM). Porque os custos fixos médios estão continuamente a baixar com o aumento da produção a curva de custos médios totais vai-se aproximando da curva de custos médios variáveis à medida que a produção vai aumentando.

A distância vertical entre a curva de custo médio (CM) e a curva de a curva de custo variável médio (CVM) iguala os custos fixos médios (CFM). Note-se que as duas curvas se vão aproximando devido à diminuição dos custos fixos médios.

AS ISOQUANTAS. PRODUÇÃO COM DUAS VARIÁVEIS: MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS COM VÁRIOS FACTORES

Consideremos a tecnologia de produção de uma empresa quando utiliza dois factores de produção os quais podem variar.

Suponha-se que os factores são trabalho e capital que se utilizam para produzir uma determinada quantidade de um bem. Existem várias combinações destes recursos produtivos, trabalho e capital, para obter um dado nível de produto. Porque todos os factores são variáveis a análise é de longo prazo.

Se existem dois factores produtivos, a função de produção pode ser representada graficamente por uma curva que se denomina por ISOQUANTA, ou **CURVA DE ISOPRODUTO** ou **CURVA DE INDIFERENÇA DO PRODUTOR**, que pode ser definida como a curva (lugar geométrico) que traduz as várias combinações de dois factores produtivos que produzem uma determinada quantidade de produto, de forma eficiente, num determinado período de tempo. Cada ponto da isoquanta representa uma combinação dos dois factores que produzem a mesma quantidade de produto. A curva tem uma inclinação

A curva de isoquanta tem um declive negativo, dado que reduzindo a quantidade de um dos factores de produção, para manter a quantidade de produto produzido ter-se-á de aumentar a quantidade de outro factor, desde que a produtividade marginal dos factores de produção seja positiva. Tendo em conta que o objectivo do produtor seja a maximização do lucro, é assumido que não serão utilizados factores produtivos com uma produtividade marginal negativa pois tal contrariaria esse objectivo.

Se a função de produção, com os factores de produção capital, K , e trabalho, L , for dada pela seguinte expressão

$$Q = f(L, K),$$

então, a equação para uma isoquanta, onde o produto é constante, é dada por:

$$f(L, K) = Q_0$$

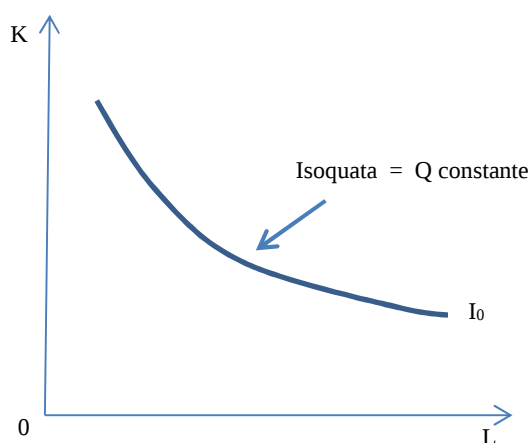
onde Q_0 significa que a **produção é constante**.

Um aumento de um dos recursos produtivos requer uma diminuição do outro factor produtivo a fim de que se mantenha o mesmo nível de produção (desde que a produtividade marginal dos factores de produção seja positiva) sendo uma das razões porque as isoquantas, normalmente, têm um declive negativo, dentro de região de produção.

O termo *isoquanta* vem do grego, significando “iso” o mesmo e “quanta” significa quantidade. Deste modo, cada isoquanta evidencia as diferentes combinações de factores produtivos que produzem a mesma quantidade de produto, Q_0 .

Sendo Q_0 um determinado nível de produção, uma isoquanta é uma fronteira da função de produção, pois satisfaz a relação $f(x_i) = Q_0$ para dado nível Q_0 , no pressuposto de que os factores produtivos estão a ser eficientemente utilizados.

No gráfico seguinte pode observar-se uma curva que representa uma ISOQUANTA, onde K representa o capital e L representa o factor trabalho, cuja combinação produtiva destes dois factores dá origem a uma quantidade fixa de produto, Q_0 , portanto, constante ao longo da **curva de indiferença do produtor**.



Ao longo de todos os pontos da isoquanta a quantidade do produto é constante, resultante de várias combinações eficientes dos dois factores produtivos. Tal significa que se pode obter a mesma quantidade de produto, Q_0 , com mais capital e menos trabalho ou vice-versa, dependendo da *elasticidade de substituição entre os dois factores*.

Assim, a combinação produtiva dos dois factores pode ser mais capital-intensiva ou mais trabalho-intensiva, consoante se utilize, relativamente, mais capital ou mais trabalho no processo produtivo. A evolução tecnológica tende a levar a uma combinação produtiva mais capital-intensiva.

A flexibilidade quanto à combinação de factores produtivos para obter uma determinada produção permite a escolha dessa combinação que minimize os custos de produção, contribuindo para a maximização do lucro da empresa.

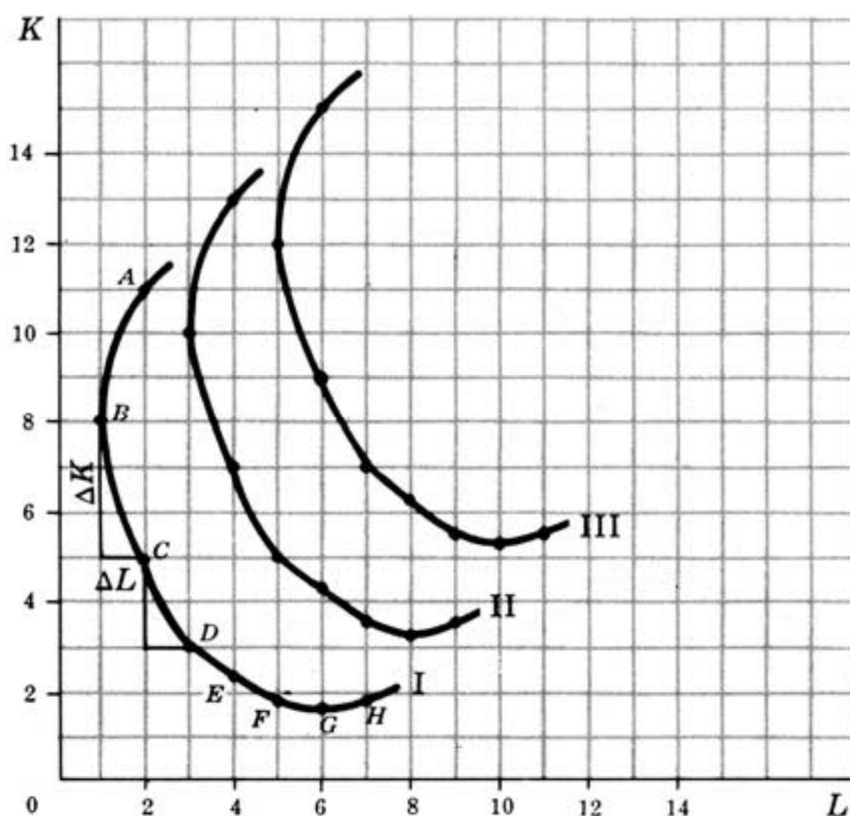
A inclinação das isoquantas traduz a taxa à qual um factor produtivo pode ser substituído por outro, mantendo o nível de produção inalterado e denomina-se por **TAXA TÉCNICA DE SUBSTITUIÇÃO (TTS)** que é negativa.

MAPA DE ISOQUANTAS

Um conjunto de isoquantas forma o mapa de isoquantas, numa análise semelhante ao mapa de indiferença com as curvas de indiferença do consumidor, cada uma representado um nível de utilidade para diferentes conjuntos de bens.

Um *mapa de isoquantas* é um conjunto de isoquantas, cada uma das quais mostra o nível máximo de produção que se pode obter com um conjunto qualquer dos dois factores de produção utilizados no processo produtivo.

Figura: Mapa de isoquantas



A inclinação destas curvas evidencia a taxa à qual L (o trabalho) pode ser substituído por K (capital) mantendo o produto constante representado por cada isoquanta. Esta inclinação das curvas é negativa, dentro da região económica, e traduz a taxa marginal de substituição técnica (TMS). A TMS de um factor produtivo por outro, é uma medida da quantidade de um factor, por exemplo capital, K, por outro, por exemplo trabalho, L, sem diminuir nem aumentar o montante de produção, Q., sendo traduzida pela inclinação da isoquanta, multiplicada por menos -1.

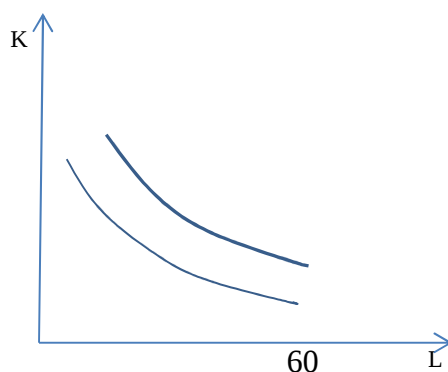
Podemos verificar uma analogia formal entre as curvas isoquantas e as curvas de indiferença da teoria do consumidor. Mas existe uma diferença substancial, pois enquanto nas curvas de indiferença não é possível medir a utilidade, as isoquantas têm um determinado valor cardinal, medido em unidades de produto. Passando-se para uma isoquanta mais elevada e para a direita significa que se tem maior quantidade de produção. Assim, no gráfico, a isoquanta III representa uma produção superior à isoquanta II e esta superior à isoquanta I.

Um mapa de isoquantas é um dos modos de descrever uma função de produção, de forma semelhante ao que acontece com as curvas de indiferença do consumidor que descrevem a função utilidade do consumidor que, como antes foi explicitado, a isoquanta é dada por $Q_0 = f(L, K)$. Acentua-se que cada isoquanta supõe um nível de produto constante. Cada isoquanta corresponde a um nível de produção diferente.

PROGRESSO TÉCNICO E AS ISOQUANTAS

O progresso técnico tem influência na função de produção, levando a que a empresa possa produzir uma quantidade de produto maior com os mesmos factores de produção existentes, pelo que a curva da isoquanta desloca-se para baixo e para a esquerda devido ao progresso técnico.

Se era obtida a produção Q_0 com K_0 e L_0 , com progresso técnico poderá obter-se a produção $Q_1 > Q_0$ com K_0 e $L_1 < L_0$. Neste caso não se trata da substituição de trabalho por capital mas existe uma redução do trabalho devido ao progresso técnico.



A REGIÃO ECONÓMICA DE PRODUÇÃO

Considere-se o produto marginal, Pmg_i , (ou produtividade marginal) definido como o aumento no produto total (PT) devido a um aumento unitário de um factor produtivo, *ceteris paribus*. Considerando-se a função de produção geral $Q = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, a produtividade marginal de um factor x_i ($i = 1, \dots, n$) é dada por:

$$Pmg_i = \partial f(x_1, \dots, x_n) / \partial x_i = f_i Q$$

A derivada parcial de uma função pode também ser designada pela notação f_i , ou outro subscrito que identifique a variável em relação a qual se faz a derivada parcial¹⁰.

A produtividade marginal de um factor produtivo é traduzida pela derivada parcial da função de produção em relação a esse factor. A produtividade marginal de um factor produtivo pode ser positiva, nula ou negativa.

Se todos os factores produtivos tiverem produtividade marginal positiva, partindo de uma dada combinação de factores, se um factor aumenta, a produção total também aumenta. Assim, com esta hipótese, para manter a produção num determinado nível, o aumento de um factor produtivo implica que se tenha de diminuir a quantidade empregada de outro, o que implica que a isoquanta tenha uma inclinação negativa (o que só acontece dentro da região económica).

Contudo, se num dado nível de produção um dos factores tiver uma produtividade marginal negativa (fora da região económica), então, um aumento

¹⁰ As derivadas parciais podem ser designadas por diversos símbolos. Em vez de se utilizar a letra d para as derivadas totais (como dQ/dx , notação devida a **Leibniz**), utiliza-se a letra grega, delta minúscula, ∂ , para identificar uma derivada parcial ($\partial q / \partial x$). Como é sabido, o símbolo de uma derivada de uma função $f(q)$ também é traduzido pelo símbolo $f'(Q)$ – notação devida a Lagrange. Correspondente a esta última notação utiliza-se para as derivadas parciais a notação $f_1, f_2, \dots, f_n$, onde o subscrito indica qual a variável independente que está a ser permitida variar, mantendo todas as outras constantes. Por exemplo, se tivermos uma função $Q=f(u, q, w)$ as derivadas parciais desta função podem ser simbolizadas por f_u, f_q e f_w , em vez de f_1, f_2, f_3, f_u significando que se está a derivar a função em relação à variável independente u , *ceteris paribus*, e assim sucessivamente para as outras variáveis. Assim, $f_1 = \frac{\partial Y}{\partial x_1}$, como a primeira de um conjunto de n derivadas parciais da função $f(x_i)$. Por exemplo, considerando a função $q=f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2$, tem-se a derivada parcial para x_1 :

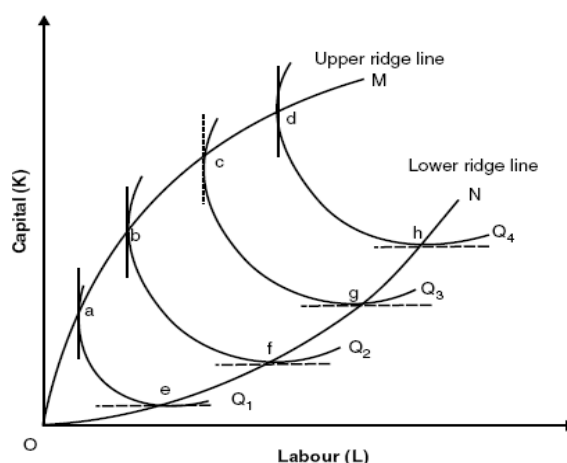
$$f_1 = \pi r^2 = \frac{\partial Y}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2.$$

deste factor com produtividade marginal negativa implica que o outro factor também tenha que aumentar, a fim de manter o mesmo nível de produção, implicando que a isoquanta, neste segmento, tenha uma inclinação positiva (estando fora da região económica).

Note-se que a curva de isoquanta (dentro da região económica) representa uma combinação *eficiente* dos dois factores produtivos, trabalho e capital, ou seja, representa o máximo de produto que se pode obter com cada específica combinação destes dois factores produtivos:

$$Q(Q^0) = \{Q|f(x) = Q^0\}$$

Considerando os segmentos da isoquanta com inclinação positiva e negativa, a forma das isoquantas é dada no gráfico seguinte¹¹ (onde as isoquantas são designadas pela letra Q).



Ora, o objectivo da maximização do lucro implica que a empresa não utilize factores produtivos com uma produtividade marginal negativa, pelo que os segmentos das isoquantas com inclinação positiva não se enquadram no pressuposto da maximização do lucro e, assim, apenas se considera o segmento das isoquantas com inclinação negativa, quando se atende ao pressuposto da maximização do lucro da empresa.

Os segmentos das isoquantas com *inclinação negativa* verificam-se quando os dois factores produtivos, capital, K, e trabalho, L, têm *produtividade marginal positiva*.

¹¹ O gráfico foi obtido em: http://mq.safaribooksonline.com/book/business/9788131759400/12dot-theory-of-production-laws-of-returns-to-two-variable-inputs/ch12_sub11_xhtml. Disponível em 14-09-2013.

Os segmentos das isoquantas com inclinação positiva ocorrem quando um dos factores produtivos tem produtividade marginal negativa e o outro tem produtividade marginal positiva. Por exemplo, na figura, acima do ponto *a* na isoquanta Q_1 , o produto marginal de K (capital) é negativo e a redução no produto devido a aumentos de K deve ser compensada por aumentos em L que tem uma produtividade marginal positiva.

Nos pontos *a, b, c, d* (no gráfico) as produtividades marginais de K e L são zero. E nos pontos *e, f, g, h*, a produtividade marginal do trabalho é nula.

As curvas OM e ON , ligando os pontos nos quais Pmg_K e o Pmg_L são, respectivamente, nulas, constituem as *curvas de fronteira da produção* do que é denominado por *região económica de produção*, que é representada pela área dentro destas curvas de fronteira.

REGIÃO ECONÓMICA DE PRODUÇÃO - Podemos definir a região económica da produção, traduzida pelas combinações dos factores produtivos com produtividade marginal positiva, sendo a fronteira desta região dada pelos pontos em que os factores produtivos têm uma produtividade marginal nula.

Dado o pressuposto da maximização do lucro das empresas, é nesta região económica que uma empresa deverá desenvolver a sua actividade produtiva, com o pressuposto de maximização do lucro, pois, se estiver a operar fora destas curvas de fronteira de produção, está a utilizar um dos factores produtivos com produtividade marginal negativa, ($\frac{\delta Y}{\delta x_i} < 0$), não se minimizando os custos.

Por exemplo, para qualquer ponto na isoquanta Q_4 fora da região económica de produção, existe um ponto na isoquanta Q_4 dentro da região económica, onde o mesmo nível de produção pode ser obtido com menos quantidades dos dois factores.

OUTROS OBJECTIVOS QUE NÃO A MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO - Contudo, podem existir objectivos para além da maximização do lucro, que levem uma empresa a operar fora da região económica, tendo como objectivos a *satisfação* dos interesses de vários grupos conectados com a empresa, como antes já foi analisado, através do modelo comportamental e do modelo da *administração*.

EFICIÊNCIA TÉCNICA E EFICIÊNCIA ECONÓMICA -A consideração fora da região económica permite a distinção entre eficiência técnica e eficiência económica. Como já foi analisado, a produção é tecnicamente ineficiente se for possível produzir um determinado montante com pelo menos menor quantidade de um factor produtivo e não mais de outro. A produção pode ser economicamente eficiente e, ao mesmo tempo, ser tecnicamente ineficiente.

Por exemplo, uma empresa pode desejar manter um nível de emprego de trabalhadores acima do que maximizaria o lucro, por razões sociais, éticas ou outras. O modelo tradicional, expressando a teoria neoclássica, baseia-se no *homo economicus*, considerando-se o indivíduo semelhante aos átomos da física, impenetráveis, sem consideração pelas relações de alteridade que desencadeiam emoções e sentimentos com influência no comportamento e escolhas dos indivíduos.

“Utilizamos o conceito de homo economicus, o actor racional neoclássico idealizado, para significar o modelo canónico do ser humano como um agente procurando a maximização do seu interesse, tomando decisões racionais, com informação perfeita e preferências ordenadas, não sendo estas preferências afectadas pelas de outrem, sendo consideradas como exógenas. Com base no homo economicus o sistema económico pode ser conceptualizado como consistindo em vários componentes isolados, cada um sendo um agente racional representativo”¹²

FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA

Considere-se o ponto e na isoquanta Q_1 . Tem-se:

$$\frac{dK}{dL}=0$$

Ora, sendo

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{P_{mgL}}{P_{mgK}} \rightarrow - \frac{P_{mgL}}{P_{mgK}} = 0 \rightarrow P_{mgL} = 0$$

¹² Donário, Arlindo; Ricardo Borges dos Santos (2013) - **O Paradigma do Homo Economicus**. Consequências na Construção do Modelo Económico e Financeiro Liberal. – EDIUAL, Universidade Autónoma de Lisboa.

No ponto e a produtividade marginal do trabalho é nula. A taxa marginal de substituição técnica de K por L ($TMS_{K,L}$) neste ponto será dada por

$$TMS_{K,L} = - \frac{dK}{dL} = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}$$

Como a $Pmg_L = 0$, segue-se que

$$TMS_{K,L} = \frac{0}{Pmg_K} = 0$$

TAXA MARGINAL DE SUBSTITUIÇÃO TÉCNICA ENTRE OS FATORES DE PRODUÇÃO K e L (TMS)

A taxa marginal (técnica) de produção, TMS, é definida como o aumento do produto (físico) total (PT) pelo aumento unitário de um factor produtivo ou, por outras palavras, a taxa marginal de substituição técnica entre os factores K e L é traduzida pela variação na quantidade utilizada de capital (ΔK), dividida pela variação na quantidade empregada do trabalho (ΔL):

$$TMS_{K,L} = - \frac{\Delta K}{\Delta L}$$

A TMS é negativa, dentro da região económica pois, para manter a produção constante, ao aumentar um factor de produção ter-se-á que diminuir a quantidade empregada do outro. Utilizando o cálculo diferencial¹³, a TMS será dada pela seguinte expressão:

$$TMS_{K,L} = - \frac{dK}{dL} \Big|_{Q=Q_0}$$

que é traduzida, graficamente, pela tangente à isoquanta num determinado ponto. A notação $Q=Q_0$ tem o objectivo relembrar que o produto é mantido constante quando L é substituído por K .

Considerando a função de produção $Q = f(K, L)$, e fazendo-se a sua diferenciação total temos

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial K} dK + \frac{\partial f}{\partial L} dL$$

Dado que

¹³ Supondo-se que a função de produção é contínua.

$\frac{\delta f}{\delta K} = PmgK$ é a produtividade marginal de K, e

$\frac{\delta f}{\delta L} = PmgL$ é a produtividade marginal de L

Tem-se que

$$dQ = PmgK dK + PmgL dL$$

Dado que por definição, uma isoquanta traduz uma produção constante, a derivada de uma constante é zero, tem-se:

$$dQ = PmgK dK + PmgL dL = 0$$

temos

$$PmgK dK = - PmgL dL$$

donde

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{PmgL}{PmgK}$$

pelo que

$$\frac{PmgL}{PmgK} = - \frac{dK}{dL}$$

tem-se que

$$TMS = \frac{PmgL}{PmgK} = - \frac{dK}{dL}$$

Assim, a TMS é dada pelo rácio das produtividades marginais dos factores produtivos.

ISOCUSTOS

A procura de factores de produção é uma procura derivada, isto é, o factor não é procurado *per se* mas sim pela utilização que lhe é dada para a produção de bens e serviços finais. Se a procura de bens finais diminui, a procura derivada por factores produtivos diminui também.

Para uma empresa a contraparte da restrição orçamental no caso da função utilidade dos consumidores é o constrangimento traduzido por um segmento de recta denominado ISOCUSTO. Isso significa que uma recta de isocustos traduz

um nível dado de custos ou, por outras palavras, o isocusto traduz as várias combinações de dois factores produtivos (por exemplo capital, K, e trabalho, L) de que resulta o mesmo custo para a empresa, $C=C_0$, onde C_0 significa que o custo é constante.

RECTA DO ISOCUSTO – Embora o número de factores produtivos que uma empresa utiliza seja variado, $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$, vamos considerar apenas dois factores produtivos, trabalho e capital.

O custo de produção para um dado nível de produto depende do preço dos factores de produção, trabalho, L, e capital, K, sendo o preço do trabalho dado por w, pelo que o custo do trabalho é wL, e o preço do capital é representado por r, sendo o preço do capital rK. Quando a empresa possui o capital, r representa o custo implícito do capital, traduzido num custo de oportunidade.

A empresa pode utilizar muitas combinações de trabalho e capital que representam o mesmo custo. A equação do isocusto (de igual custo) está para a empresa assim como a restrição orçamental (ou recta do orçamento) está para o consumidor. Para gerar o produto final x, a empresa suporta o custo com factores de produção.

Fazemos uma hipótese simplificadora de que a empresa actue num mercado perfeitamente competitivo de factores, o que implica que o preço dos factores, w e r, é um dado para a empresa, sendo determinados pelo mercado sendo, por conseguinte, esses preços considerados como parâmetros ou variáveis exógenas.

Outra hipótese da análise traduz-se em que o custo total é uma quantidade fixa conhecida para a empresa, $C=C_0$.

A função de custo total da empresa é expresso por

$$C = wL + rK$$

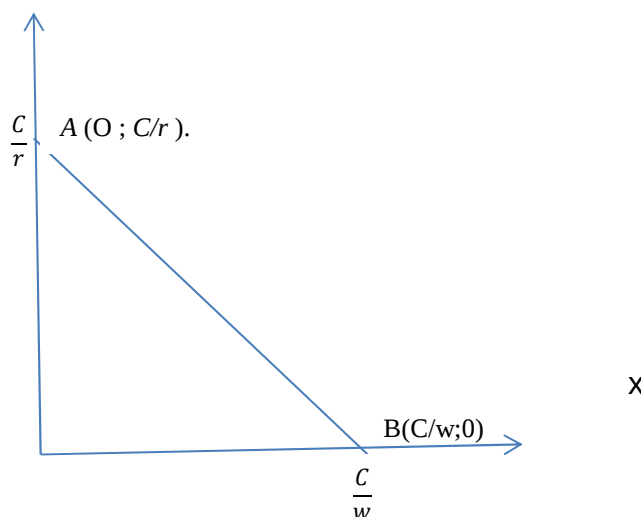
$$rK = C - wL$$

$$K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r} L$$

Derivando K em ordem a L, tem-se

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{w}{r}$$

A partir destas equações pode ser representado num diagrama (L,K) o custo total por um segmento de recta unindo dois pontos $(\frac{C}{r}, \frac{C}{w})$, segmento de recta que representa o isocusto.



Em todos os pontos deste segmento de recta (que por simplificação lhe chamaremos recta) o custo é sempre o mesmo. Se a empresa gastar tudo (hipótese simplificadora) em capital, poderá obter C/r . Se gastar tudo em trabalho, poderá obter C/w unidades de trabalho. Juntando estes dois pontos (A e B) por uma linha recta obtemos o isocusto da empresa, que poderá obter qualquer combinação de capital e trabalho evidenciada na recta do isocusto. A inclinação do isocusto é dada por

$$\frac{C/P_K}{C/P_L} = - \frac{C}{P_K} \cdot \frac{P_L}{C} = - \frac{P_L}{P_K} = \frac{w}{r} = \text{TMS}$$

ou seja, é igual ao rácio do preço dos factores produtivos, com o sinal negativo, representando a taxa marginal de substituição (TMS).

EQUILÍBRIO DO PRODUTOR. TANGÊNCIA ENTRE UM ISOCUSTO DADO E A CURVA ISOQUANTA MAIS ELEVADA POSSÍVEL

Um mapa de isoquantas é formado pelo conjunto de isoquantas, como pode ser observado na figura seguinte. Formalmente é semelhante ao mapa de indiferença na teoria do produtor.

Importa saber qual é a combinação de factores que com o menor custo produz uma determinada quantidade de produto, ou seja, como se expressa o equilíbrio do produtor, pois considera-se que um produtor está em equilíbrio quando maximiza o produto para um dado nível de custos.

Em termos gráficos, representa-se o equilíbrio do produtor quando a isoquanta mais elevada é tangente a uma particular curva de isocusto.

Para isso basta traçar uma linha de isocusto, para um determinado nível de custos. Traçando no mesmo referencial uma série de isoquantas encontra-se um ponto de tangência de uma isoquanta com uma linha de isocusto, o qual traduz a produção máxima para um custo dado.

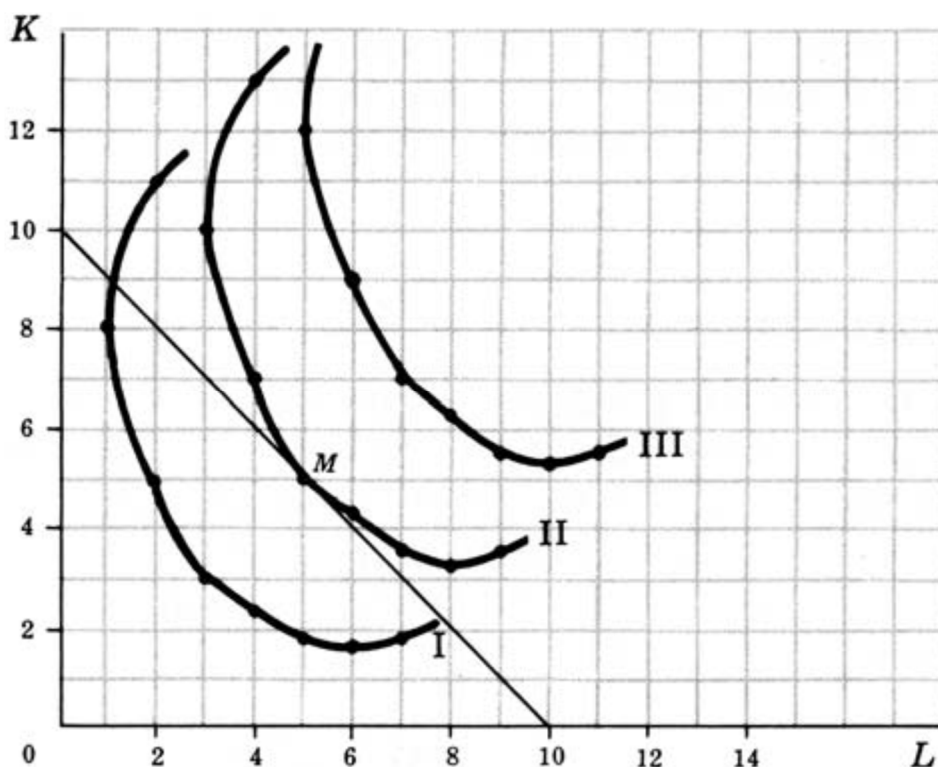


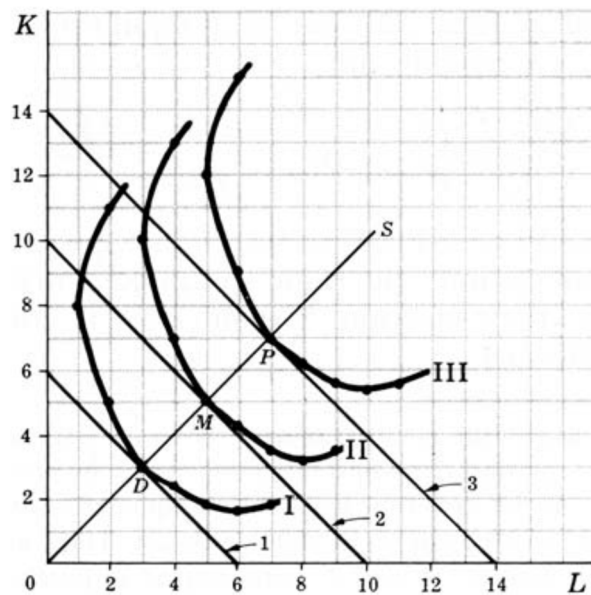
Figura: mapa de isoquantas e combinação óptima de factores dada pela tangência do isocusto a uma curva de isoquantas

Vemos, pois, que a solução óptima é constituída pela combinação produtiva dos factores K e L situados:

- sobre a recta de isocusto;
- sobre a mesma isoquanta mais elevada possível, tendo em conta o constrangimento constituído pelo isocusto.

A solução é a indicada pelo ponto M de tangência entre o isocusto e a isoquanta II. As coordenadas deste ponto indicam as quantidades físicas dos factores L e K (com dados preços) que devem ser combinadas para maximizar a produção eficientemente. Outros pontos do isocusto são combinações realizáveis mas cujo produto é inferior ao do ponto M. A empresa não pode atingir a isoquanta III com os custos actuais e sem que se verifique progresso técnico. Note-se que se a empresa estiver a produzir na isoquanta I, não está a ser eficiente, não maximiza o produto pois, com os custos actuais, dados pela curva de isocusto, poderia obter um produto mais elevado, dado pela isoquanta II.

CAMINHO DE EXPANSÃO



Se a empresa altera os seus gastos enquanto os preços do trabalho e do capital permanecem constantes, a recta do isocusto da empresa tem uma deslocação paralela- para a direita e para cima se os custos sobem, para a esquerda se os custos baixam. Estes diferentes isocustos são tangentes a diferentes isoquantas, definindo os vários pontos de equilíbrio para a empresa.

Na figura anterior, os pontos D , M e P determinam a máxima produção para dados níveis de custo total.

Juntando estes vários pontos de equilíbrio, nos pontos em que as rectas de isocustos são tangentes às várias curvas de isoquantas, obtém-se o denominado CAMINHO DE EXPANSÃO da empresa, que é semelhante à curva de rendimento-consumo no caso do consumidor.

FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA .MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS. ESCOLHA DOS FACTORES PRODUTIVOS. MÉTODO DE LAGRANGE. QUESTÃO DA DUALIDADE

Matematicamente, visa-se minimizar os custos totais dado $q = f(K, L) = q_0$, para uma dada produção, através da função Lagrangeana que, pelo multiplicador de

Lagrange¹⁴, λ , nos permite transformar um problema de maximização de um constrangimento numa questão de maximização de não constrangimento.

DUALIDADE DE ANÁLISE - A função Lagrangeana pode ser utilizada tanto para a maximização de uma função sujeita a um constrangimento, como para a minimização de uma função também sujeita a um constrangimento. Esta visão alternativa é designada como *DUALIDADE*, que significa que uma determinada questão pode ser analisada de vários ângulos.

Tanto se pode desejar maximizar a produção (maximizar a função de produção, função objectivo) sujeita ao constrangimento dos custos da empresa, como se pode desejar minimizar os custos (aqui função objectivo) para uma dada produção. O que importa é definirmos qual a função objectivo e qual a função constrangimento a fim de desenvolver a função Lagrangeana.

Em termos genéricos deve considerar-se, **como primeiro passo, escrever a equação de Lagrange, que é a soma da função objectivo $f(x, p)$ mais a função constrangimento $g(x_i)$ esta multiplicada pelo multiplicador de Lagrange, sendo a função constrangimento igualada a zero.**

Sendo

$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ a **função objectivo (FO)**

$Y = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$ a **função constrangimento (FC)**

λ o multiplicador de Lagrange.

Igualando a zero a função constrangimento ($Y - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_n x_n = 0$) a função **Lagrangeana ($\mathcal{L}$)** será dada por:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \lambda (Y - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n)$$

Ou seja:

$$\mathcal{L} = \text{Função objectivo} + \lambda (\text{Função constrangimento})$$

$$\mathcal{L} = FO + \lambda FC$$

¹⁴ Joseph Louis Lagrange foi um matemático italiano (1736-1813)

O **segundo passo consiste** em achar as derivadas parciais em relação às diversas variáveis e ao multiplicador de Lagrange e igualá-las a zero, a fim de obter um máximo ou um mínimo.

O terceiro passo consiste em verificar através da **matriz Hessiana**, utilizando as segundas derivadas parciais, se os valores extremos da função de Lagrange são máximos ou mínimos.

OBJECTIVO: MINIMIZAÇÃO DOS CUSTOS SUJEITA A UMA DADA PRODUÇÃO.

Para obter uma dada quantidade de produto, Q , pode ter-se como objectivo a *minimização dos custos*, o que se obtém, através da função *Lagrangeana*. A questão, nesta hipótese, é escolher os factores de produção, capital e trabalho, para minimizar os custos. Assim, temos:

$$\text{Min}_{L,K} C = wL + rK \quad (\text{Função objectivo})$$

Sujeito à restrição

$$Q = f(K,L) \quad (\text{função constrangimento})$$

Com estas duas funções pode construir-se a função de Lagrange, que é uma função compósita, integrando a função objectivo e a função constrangimento (multiplicada pelo multiplicador de Lagrange), que pode ser expressa do seguinte modo:

$$\mathcal{L}(L,K,\lambda) = wL + rK + \lambda_1 [Q_0 - f(K, L)]$$

Encontram-se os pontos críticos (neste caso mínimos) desta função compósita derivando-a *parcialmente* a função Lagrangeana em relação às diversas variáveis, f_L , f_K e f_λ , e igualando-as a zero.

Assim, as condições de primeira ordem para a minimização dos custos são:

$$f_L = w - \lambda f_L = 0$$

$$f_K = r - \lambda f_K = 0$$

$$f_\lambda = q_0 - f(K, L) = 0$$

Estas três equações derivadas da função primitiva são as condições para a existência de um ponto crítico para a função de Lagrange. Dado que λ multiplica a função constrangimento na definição de $\mathcal{L}$, a equação f_λ é zero, repetindo a função constrangimento, sendo equivalente a

$$Q_0 - f(K, L) = 0$$

Dividindo as duas primeiras equações das derivadas parciais uma pela outra, temos

$$\frac{w}{r} = \frac{f_L}{f_K} = \text{TMS}_{L,K}$$

Esta última expressão significa que, para minimizar os custos, a taxa marginal de substituição (TMS) tem de igualar o rácio dos preços dos factores. Modificando a última expressão pode obter-se a seguinte equação

$$\frac{f_K}{r} = \frac{f_L}{w}$$

que significa, em termos económicos, que para que os custos totais sejam minimizados é necessário que a produtividade marginal dos factores de produção (f_K e f_L) por unidade monetária gasta deve ser igual para todos os factores. Os numeradores da última equação representam as contribuições marginais dos factores produtivos para a função de produção.

Se for entendido aumentar a produção deverá ter-se por base a utilização do factor que tiver a mais elevada produtividade marginal por unidade monetária, desde que se verifique a existência de substituíbilidade dos factores. Podemos também obter a igualdade seguinte:

$$\lambda = \frac{w}{f_L} = \frac{r}{f_K}$$

O multiplicador de Lagrange evidencia o custo marginal decorrente de obter mais uma unidade de um factor de produção. Se o objectivo da empresa é a minimização dos custos, o custo marginal de incrementar o produto deve ser igual quer se utilizem unidades adicionais de trabalho (w/f_L) ou capital (r/f_K).

Assim, o multiplicador de Lagrange, λ , pode ser interpretado, na hipótese da função objectivo ser a minimização dos custos, como o rácio do custo-benefício:

$$\lambda = \frac{\text{Custo marginal do factor } x_i}{\text{Benefício marginal do factor } x_i}$$

para qualquer x_i .

BIBLIOGRAFIA

Donário, Arlindo; Ricardo **Borges dos Santos** (2013) - O Paradigma do *Homo Economicus*. Consequências na Construção do Modelo Económico e Financeiro Liberal. – EDIUAL, Universidade Autónoma de Lisboa.

Galbraith, John Kenneth (1979) - O Novo Estado Industrial - Tradução de Leônidas Gontijo de Carvalho Revisão de Aldo Bocchini Neto, sobre a 3.ª edição do Autor-

Samanez, Gregory R.; Larkin; Nick G. **Hollon**; Laura L. **Carstensen**, ; Brian **Knutson** (2008) - Individual Differences in Insular Sensitivity During Loss Anticipation Predict Avoidance Learning - PSYCHOLOGICAL SCIENCE - Volume 19—Number 4.- Stanford University

Thaler, Richard H. (2000b: 276) - Toward a positive theory of consumer choice, as reprinted in Choices, Values, and Frames - Daniel Kahneman and Amos Tversky. - Cambridge, U.K. Cambridge University Press, 2000, pp. 269–287.

Zak, Paul J. ; Amos **Nadler** (2010) - Using brains to create trust: a manager's toolbox. In *"Neuroeconomics and the Firm"* - Edward Elgar Cheltenham, UK · Northampton, MA, USA. Pp.69-77.